

二次元有限要素法電磁界解析における高次ベクトル形状関数について

羽野 光夫^{†a)}

On Higher-Order Vector Shape Functions in Two Dimensional Finite Element Method for Electromagnetic Field Analysis

Mitsuo HANO^{†a)}

あらまし 有限要素法による電磁界固有値解析において、スプリアス解の発生は重要な問題であった。現在、多くの汎用ソフトで実用化されている基本要素においてはスプリアス解の問題は生じない。しかし、有限要素の高次化を含む高機能化は、要素分割などの問題解決の一助となり得る。その際、新たにスプリアス解の問題が発生するかも知れない。そこで、三角形要素、及び長方形要素の点、辺、及び面にクラス分けし、それぞれに属する形状関係の満たすべき境界条件を考慮しつつ、スプリアス解が発生しないように組織的に次数等を割り付ける手法について述べる。三角形要素においては、完全型、及び不完全型のベクトル形状関数を示す。また、長方形要素においてはラグランジェ系列、及びセレンディピティ系列を含む多様なベクトル形状関数を示す。

キーワード 電磁界解析, 有限要素法, 高次要素, ベクトル形状関数, 部分空間

1. ま え が き

1970年代有限要素法による導波路解析では、伝搬(z)方向の電磁界2成分(E_z, H_z)による汎関数がよく用いられていた[1]。その後、電界の3成分を用いる汎関数も提案された[2],[3]。しかし、いずれの場合も多数のスプリアス解が発生し、スプリアス解除去の試みが続いた。

1980年代の始めに、Nedelecによって四面体要素のベクトル関数空間が提案された[4]。その後、この理論に基づくベクトル形状関数が多数開発された[5]~[9]。しかし、文献[4]が難解だったため、約20年経てようやくWebb[10]やRenら[11]によって関数空間が検討され始め、スプリアス解のメカニズムが明らかになって来た[12]。一方、長方形要素の辺に自由度を配置したベクトル形状関数が導波路解析に適用され、スプリアス解が発生しないことが示された[13],[14]。

本論文では、ベクトル多項式空間に基づく三角形要素、及び双多項式に基づく長方形要素のスプリアス解の発生しないベクトル形状関数について解説する[15],[16]。

まず、スカラ形状関数とベクトル形状関数の関係を示す。次に、三角形要素と長方形要素の形状関数と自由度を点、辺、及び面にクラス分けし、各クラスに属する形状関数の境界条件を明らかにする。そこで、三角形要素の完全型、及び不完全型の2系列について、面積座標を用いたベクトル形状関数の構成法を示す。一方、長方形要素では次数に加えて型番を用いることによって統一的に扱う。形状関数は、二つの線座標を用いた双多項式によって構成する。いずれの場合も、スカラ形状関数の勾配場がベクトル形状関数によって過不足なく展開できることを示す。また、ベクトル形状関数の回転場の自由度についても論議する。

2. ベクトル形状関数

有限要素法で用いられるスカラ形状関数は、多項式と節点情報によって具体的に決定される。一方、ベクトル形状関数はスカラ関数と簡単なベクトル関数の積によって構成される。

2.1 三角形要素

三角形要素では、スカラ形状関数を構成するのに図1(a)の完全多項式が用いられる。また、簡単なベクトルとしては図1(b)の (i, j) が用いられる。しかし、図1(a)の完全多項式は要素行列を作成する際非常に煩雑になるためあまり用いられない。そのため、

[†] 山口大学大学院創成科学研究科, 宇部市
Graduate School of Sciences and Technology for Innovation,
Yamaguchi University, 2-16-1 Tokiwadai, Ube-shi, 755-8611
Japan

a) E-mail: hano@yamaguchi-u.ac.jp

$$\begin{array}{cc} 1 & i (= \nabla x) \\ x & y \\ x^2 & xy & y^2 & j (= \nabla y) \end{array}$$

(a) 完全 2 次多項式 (b) 単位ベクトル

図 1 x, y 座標による完全多項式と単位ベクトル
Fig. 1 A set of complete polynomials and unit vectors using x, y -coordinates.

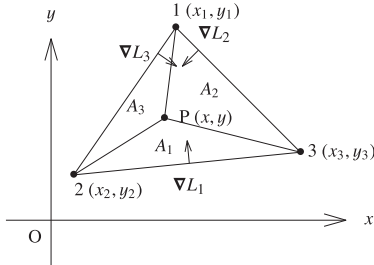


図 2 三角形要素と面積座標
Fig. 2 A triangular element and area coordinates.

図 2 の三角形要素では点 $P(x, y)$ を表すのに面積座標がよく用いられる。面積座標 L_i ($i = 1 \sim 3$) は、点 P と三角形要素の各辺で作る三角形の面積 A_1, A_2, A_3 を用いて、(1) のように定義される。

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad (1)$$

ここで、 $A (= A_1 + A_2 + A_3)$ は三角形要素の面積である。よって、面積座標は $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ の関係にある。

三角形の頂点 i ($i = 1 \sim 3$) の座標を (x_i, y_i) とすると、面積座標は (2) のように与えられる。

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad (2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_i &= x_{i+1}y_{i+2} - x_{i+2}y_{i+1}, & b_i &= y_{i+1} - y_{i+2}, \\ c_i &= x_{i+2} - x_{i+1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{三角形の面積} \quad (4)$$

面積座標による完全 2 次多項式 [19] を図 3(a) に、その際に用いる勾配ベクトルを図 3(b) に示す。勾配ベクトルと三角形要素の関係を、図 2 に示している。また、完全 2 次多項式と回転ベクトルの組み合わせとして、図 4 も考えられる。ここで、 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$

$$\begin{array}{cc} L_1^2 & \nabla L_1 \\ L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_2^2 & L_2 L_3 & L_3^2 & \nabla L_3 \end{array}$$

(a) 完全 2 次多項式 (b) 勾配ベクトル

図 3 面積座標による完全多項式と勾配ベクトル
Fig. 3 A set of complete polynomials and unit vectors using the area coordinates.

$$\begin{array}{cc} L_1^2 & \mathbf{W}_1 \\ L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_2^2 & L_2 L_3 & L_3^2 & \mathbf{W}_3 \end{array}$$

(a) 完全 2 次多項式 (b) 回転ベクトル

図 4 面積座標による完全多項式と回転ベクトル
Fig. 4 A set of complete polynomials and unit vectors using the area coordinates.

$$\begin{array}{ccc} 1 & x & x^2 \\ y & xy & x^2 y \\ y^2 & xy^2 & x^2 y^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nabla x (= i) \\ \nabla y (= j) \end{array}$$

(a) 双 2 次多項式 (b) 単位ベクトル

図 5 x, y 座標による双多項式と単位ベクトル
Fig. 5 A set of complete polynomials and unit vectors using x, y -coordinates.

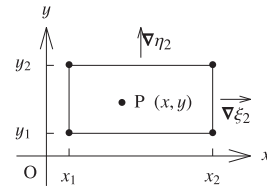


図 6 長方形要素と線座標
Fig. 6 A rectangular element and the line coordinates.

は Whitney 関数で、(5) のように与えられる [17].

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2 \\ \mathbf{W}_2 &= L_3 \nabla L_1 - L_1 \nabla L_3 \\ \mathbf{W}_3 &= L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

\mathbf{W}_i は図 2 における三角形の頂点 i を中心に左廻りの回転ベクトルを表す。

2.2 長方形要素

長方形要素では、スカラー形状関数を構成するのに図 5(a) の双多項式が用いられる。また、ベクトル形状関数の作成には双多項式に加えて図 5(b) の単位ベクトル (i, j) が用いられる。三角形要素と同様に、長方形要素の場合も線座標を用いると要素行列の作成が容易になる。長方形要素を、図 6 に示す。点 $P(x, y)$ を、(6) と (7) の二つの線座標で表す。

$$\begin{matrix} \xi_1^2 \eta_1^2 & \xi_1 \xi_2 \eta_1^2 & \xi_2^2 \eta_1^2 & \nabla \xi_2 \\ \xi_1^2 \eta_1 \eta_2 & \xi_1 \xi_2 \eta_1 \eta_2 & \xi_2^2 \eta_1 \eta_2 & \nabla \eta_2 \\ \xi_1^2 \eta_2^2 & \xi_1 \xi_2 \eta_2^2 & \xi_2^2 \eta_2^2 & \end{matrix}$$

(a) 双2次多項式 (b) 勾配ベクトル

図7 線座標による双多項式と勾配ベクトル
Fig.7 A set of bilinear polynomials and unit vectors using the line coordinates.

$$\xi_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \xi_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

$$\eta_1 = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \quad \eta_2 = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (7)$$

線座標はそれぞれ $\xi_1 + \xi_2 = 1$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$ の関係がある。

線座標を用いた双多項式を図7(a)に、その際に用いる勾配ベクトルを図7(b)に示す。

3. 各要素におけるクラス

三角形要素の形状関数と自由度が属する点、辺、及び面のクラスを図8(a)に示す。①~③は点を、④~⑥は辺を、そして⑦は面をそれぞれ表している。一方、長方形要素では図8(b)のように九つのクラスに分けられる。①~④は点を、⑤~⑧は辺を、そして⑨は面をそれぞれ表している。各クラスに属する形状関数の条件を、以下に示す。

3.1 スカラ形状関数

クラス④に属するスカラ形状関数を N_i 、また座標を \mathbf{r}_i とすると、点に属するスカラ形状関数は(8)の条件を満たす。

$$N_i(\mathbf{r}_j) \begin{cases} \neq 0 & (i = j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = \text{node}) \quad (8)$$

また、辺に属するスカラ形状関数は(9)、(10)の条件を満たす。

$$N_i(\mathbf{r}_j) = 0 \quad (i = \text{edge}, j = \text{node}) \quad (9)$$

$$N_i(\mathbf{r}_j) \begin{cases} \neq 0 & (i = j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = \text{edge}) \quad (10)$$

更に、面に属するスカラ形状関数は(11)の条件を満たす。

$$N_i(\mathbf{r}_j) = 0 \quad (i = \text{face}, j = \text{node}, \text{edge}) \quad (11)$$

3.2 ベクトル形状関数

点に属するベクトル形状関数は、存在しない。クラ

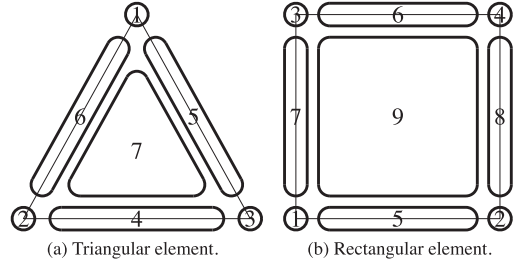


図8 各有限要素のクラス
Fig.8 Classes of finite elements.

表1 三角形要素における形状関数とクラスの関係
Table 1 A relationship between shape functions and classes of the triangular element.

面積座標			スカラ	ベクトル形状関数					
L_1	L_2	L_3	形状関数	\mathbf{W}_1	\mathbf{W}_2	\mathbf{W}_3	∇L_1	∇L_2	∇L_3
0	0	0	(0)	4	5	6	(0)	(0)	(0)
*	0	0	1	(7)	5	6	(0)	6	5
0	*	0	2	4	7	6	6	(0)	4
0	0	*	3	4	5	7	5	4	(0)
0	*	*	4	4	7	7	7	4	(4)
*	0	*	5	(7)	5	7	5	7	(5)
*	*	0	6	(7)	7	6	6	(6)	7
*	*	*	7	(7)	7	7	(7)	7	7

ス④に属するベクトル形状関数を \mathbf{N}_i 、辺④の単位接線ベクトルを \mathbf{t}_i と表すと、辺に属するベクトル形状関数は(12)の条件を満たす。

$$\mathbf{N}_i(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{t}_j \begin{cases} \neq 0 & (i = j) \\ = 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = \text{edge}) \quad (12)$$

一方、面に属するベクトル形状関数は(13)の条件を満たす。

$$\mathbf{N}_i(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{t}_j = 0 \quad (i = \text{face}, j = \text{edge}) \quad (13)$$

表1に三角形要素、表2に長方形要素における形状関数の単項式の指数とクラスの関係を示す。表1の面積座標、及び表2の線座標の下にある0と*はそれぞれ単項式の指数を表す。ここで、*は正の整数を表している。また、クラス0は図8に対応するクラスが存在しないことを意味する。表中の括弧()については、後述する。

4. 三角形要素

4.1 部分空間と自由度

図1(a)の2次元 p 次完全多項式空間 \mathbb{P}_p^2 からなる

表 2 長方形要素における形状関数とクラスの関係
Table 2 A relationship between shape functions and classes of the rectangular element.

線座標				スカラ	ベクトル形状関数	
ξ_1	ξ_2	η_1	η_2	形状関数	$\nabla\xi_2$	$\nabla\eta_2$
0	0	0	0	(0)	(0)	(0)
0	0	0	*	(0)	6	(0)
0	0	*	0	(0)	5	(0)
0	0	*	*	(0)	9	(0)
0	*	0	0	(0)	(0)	8
*	0	0	0	(0)	(0)	7
*	*	0	0	(0)	(0)	10
*	0	*	0	1	5	7
0	*	*	0	2	5	8
*	0	0	*	3	6	7
0	*	0	*	4	6	8
*	*	*	0	5	5	10
*	*	0	*	6	6	10
*	0	*	*	7	9	7
0	*	*	*	8	9	8
*	*	*	*	9	9	10

表 3 2次元 p 次ベクトル完全多項式空間 $(\mathbb{P}_p^2)^2$ の部分空間

Table 3 Subspaces in $(\mathbb{P}_p^2)^2$.

degree p	null space G			range space S	
	face	edge	node	edge	face
0	—	—	$G_n^0(2)$	—	—
1	—	$G_e^1(3)$	ϕ	$S_e^1(1)$	—
2	$G_f^2(1)$	$G_e^2(3)$	ϕ	ϕ	$S_f^2(2)$
3	$G_f^3(2)$	$G_e^3(3)$	ϕ	ϕ	$S_f^3(3)$
4	$G_f^4(3)$	$G_e^4(3)$	ϕ	ϕ	$S_f^4(4)$
5	$G_f^5(4)$	$G_e^5(3)$	ϕ	ϕ	$S_f^5(5)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ベクトル空間 $(\mathbb{P}_p^2)^2$ の部分空間とその自由度を、表 3 に示す。G は rot 演算子に対する零空間を、S はその非零空間をそれぞれ表す。また、下付きの n は点を、 e は辺を、 f は面をそれぞれ表す。上付きの数字は次数を表す。括弧内の数字は、各部分空間の自由度を表す。G_e と S_e が張る空間に属するベクトル関数は、(12) の条件を満たす。また、G_f と S_f が張る空間に属するベクトル関数は、(13) の条件を満たす。図 1 (b) の二つの単位ベクトルは、G_n⁰ の張る空間に属する。

4.2 三角形完全型要素

図 3 (a) の完全 2 次多項式と図 3 (b) の勾配ベクトルを組み合わせると、表 4 の 18 個のベクトル関数が得られる。ところで、面積座標はその性質から (14) の関係を満たしている。

$$\nabla L_1 + \nabla L_2 + \nabla L_3 = 0 \quad (14)$$

すなわち、表 4 の各欄には従属関数が一つずつ含ま

表 4 三角形完全型 3 次要素のベクトル形状関数
Table 4 Shape functions of complete-type and 3rd-order triangular vector element.

shape functions	④	⑤	⑥	⑦
$L_1^2 \nabla L_1$		×	×	
$L_2^2 \nabla L_2$				○
$L_3^2 \nabla L_3$			○	
$L_2^2 \nabla L_1$				○
$L_2^2 \nabla L_2$	×		×	
$L_2^2 \nabla L_3$	○			
$L_3^2 \nabla L_1$		○		
$L_3^2 \nabla L_2$	○			
$L_3^2 \nabla L_3$	×	×		
$L_1 L_2 \nabla L_1$				○
$L_1 L_2 \nabla L_2$			×	
$L_1 L_2 \nabla L_3$				○
$L_2 L_3 \nabla L_1$				○
$L_2 L_3 \nabla L_2$	○			
$L_2 L_3 \nabla L_3$	×			
$L_1 L_3 \nabla L_1$		○		
$L_1 L_3 \nabla L_2$				○
$L_1 L_3 \nabla L_3$		×		
subtotal	3	3	3	3
total	12			

れることになる。表 4 の○×印は、図 8 (a) の④、⑤、⑥において接線成分をもつことを表す。また、(13) の条件を満たす関数は、⑦の欄に○印が付いている。最初の欄の $L_1^2 \nabla L_1$ は⑤と⑥に同時に接線成分をもつことから、ベクトル形状関数としては不適で、×印を施して除外する。同様に、 $L_2^2 \nabla L_2$ と $L_3^2 \nabla L_3$ も不適である。第 4 番目の欄の $L_1 L_2 \nabla L_1$ と $L_1 L_2 \nabla L_2$ は共に⑥に接線成分をもつことから、どちらか一方を除外しなければならない。ここでは、 $L_1 L_2 \nabla L_2$ を除外した。これら除外されたベクトル関数は、表 1 において括弧 () が付された欄に属している。以下、同様である。すなわち、表 1 における括弧 () は不適か、または冗長な項を表していることになる。

次に、3 次スカラー形状関数の勾配場が、表 4 のベクトル形状関数で展開できることを (15) に示す。

$$\begin{pmatrix} \nabla L_1^3 \\ \nabla L_2^3 \\ \nabla L_3^3 \\ \nabla L_2^2 L_3 \\ \nabla L_2 L_3^2 \\ \nabla L_1^2 L_3 \\ \nabla L_1 L_3^2 \\ \nabla L_1^2 L_2 \\ \nabla L_1 L_2^2 \\ \nabla L_1 L_2 L_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_2^2 \nabla L_3 \\ L_2 L_3 \nabla L_2 \\ L_2^2 \nabla L_2 \\ L_1^2 \nabla L_3 \\ L_1 L_3 \nabla L_1 \\ L_3^2 \nabla L_1 \\ L_1^2 \nabla L_2 \\ L_1 L_2 \nabla L_1 \\ L_2^2 \nabla L_1 \\ L_2 L_3 \nabla L_1 \\ L_1 L_3 \nabla L_2 \\ L_1 L_2 \nabla L_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

この関係が得られることが、電磁界の固有値解析においてスプリアス解が発生しない要因となる。この組み合わせを三角形完全型 3 次要素と呼ぶことにする。スカラー形状関数は 3 次の単項式で構成される一方、ベクトル形状関数は表 4 に示すように 2 次の単項式と勾配ベクトルとで構成されている。すなわち、ベクトル形状関数の単項式の次数はスカラー形状関数のそれより 1 次低いことになる。表 4 の自由度は 12 であり、表 3 の $p = 2$ より上の自由度を足し合わせると 12 となり、これらは一致する。三角形完全型 k 次要素は k 次単項式から成るスカラー形状関数と、 $(k - 1)$ 次単項式と勾配ベクトルから成るベクトル形状関数の対である。

次に、表 4 のベクトル形状関数の回転場を (16) に示す。ここで、 $\mathbf{K} = \nabla L_1 \times \nabla L_2$ である。

$$\begin{pmatrix} \nabla \times (L_2^2 \nabla L_3) \\ \nabla \times (L_2 L_3 \nabla L_2) \\ \nabla \times (L_3^2 \nabla L_2) \\ \nabla \times (L_1^2 \nabla L_3) \\ \nabla \times (L_1 L_3 \nabla L_1) \\ \nabla \times (L_3^2 \nabla L_1) \\ \nabla \times (L_1^2 \nabla L_2) \\ \nabla \times (L_1 L_2 \nabla L_1) \\ \nabla \times (L_2^2 \nabla L_1) \\ \nabla \times (L_2 L_3 \nabla L_1) \\ \nabla \times (L_1 L_3 \nabla L_2) \\ \nabla \times (L_1 L_2 \nabla L_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \mathbf{K} \\ L_2 \mathbf{K} \\ L_3 \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (16)$$

(16) の右辺の自由度は 3 で、これは表 3 の非零空間の部分空間 S_e^1 と S_f^2 の自由度と一致する。

更に、三角形完全型 2~5 次要素のスカラー自由度 (●) とベクトル自由度 (→) を図 9 に示す。ただし、三角形完全型 1 次要素におけるベクトル形状関数の自由度は表 3 から 2 となり、要素として存在しないことが分かる。

4.3 三角形不完全型要素

三角形要素では、更に図 4 の組み合わせによって表 4 とは異なる系列のベクトル形状関数を構成できることが、Nedelec によって発表された [4]。ただし、文献 [4] では表 3 の p 次ベクトル完全多項式空間から同次部分空間 G_e^p , G_f^p を除去するように書かれている。しかし、形状関数の構成上、ある関数空間から特定の部分空間を除去することは非常に困難で、事実上不可能である。そこで、関数の積み上げで構成する方法が考え出された [12]。

図 4(b) の回転ベクトルは、スカラー 1 次形状関数の勾配場を (17) のように展開できる。

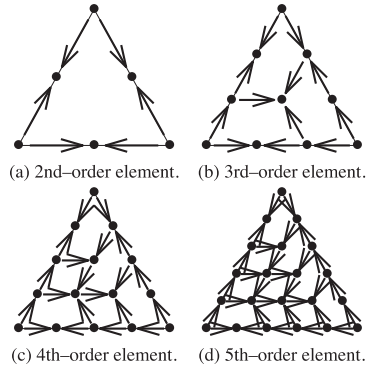


図 9 三角形完全型要素のスカラー自由度 (●) とベクトル自由度 (→)

Fig. 9 Scalar (●) and vector (→) unknowns of complete-type triangular elements.

表 5 三角形不完全 3 次要素のベクトル形状関数
Table 5 Shape functions of incomplete-type and 3rd-order triangular vector element.

shape functions	④	⑤	⑥	⑦
$L_2^2 \mathbf{W}_1$	○			
$L_3^2 \mathbf{W}_1$	○			
$L_2 L_3 \mathbf{W}_1$	○			
$L_1^2 \mathbf{W}_2$		○		
$L_3^2 \mathbf{W}_2$		○		
$L_1 L_3 \mathbf{W}_2$		○		
$L_1^2 \mathbf{W}_3$			○	
$L_2^2 \mathbf{W}_3$			○	
$L_1 L_2 \mathbf{W}_3$			○	
$L_1^2 \mathbf{W}_1$				×
$L_1 L_2 \mathbf{W}_2$				○
$L_1 L_3 \mathbf{W}_3$				○
$L_1 L_2 \mathbf{W}_1$				×
$L_2^2 \mathbf{W}_2$				○
$L_2 L_3 \mathbf{W}_3$				○
$L_1 L_3 \mathbf{W}_1$				×
$L_2 L_3 \mathbf{W}_2$				○
$L_3^2 \mathbf{W}_3$				○
subtotal	3	3	3	6
total	15			

$$\begin{pmatrix} \nabla L_1 \\ \nabla L_2 \\ \nabla L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここで、(17) の右辺は表 3 の G_n^0 と S_e^1 の張る空間の要素である。よって、1 次ベクトル完全多項式空間から G_e^1 が除外されていることが分かる。

図 4(a) の完全 2 次多項式と図 4(b) の回転ベクトルを組み合わせると、表 5 の 18 個のベクトル関数が得られる。表 5 の○印は、図 8(a) の④、⑤、⑥において接線成分をもつことを表す。また、(13) の条件を満たす関数には⑦の欄に○×印が付いている。ここで、

$\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ の間には (18) の恒等式が存在する.

$$L_1 \mathbf{W}_1 + L_2 \mathbf{W}_2 + L_3 \mathbf{W}_3 = 0 \quad (18)$$

よって, 表 5 の下三つの欄には従属関数一つずつ含まれていることになる. 第 4 番目の欄の $L_1^2 \mathbf{W}_1$, $L_1 L_2 \mathbf{W}_2$, 及び $L_1 L_3 \mathbf{W}_3$ は (18) の関係より, どれか一つを除外しなければならない. ここでは, $L_1^2 \mathbf{W}_1$ を除外した. 以下, 表 1 の \mathbf{W}_1 の欄に示すように ⑦ に属する関数は, 全て冗長として除外する. 小計の欄より, 各辺にはそれぞれ三つの自由度が存在することが分かる. また, 面内には六つの自由度が存在する. 合計 15 となる. すなわち, 表 3 の $p=3$ より上の 3 次ベクトル完全多項式空間から同次部分空間 $\mathbf{G}_e^3, \mathbf{G}_f^3$ が除外されている. このようにベクトル完全多項式空間から一部の部分空間を取り除くことから, この要素を三角形不完全型 3 次要素と呼ぶことにする.

次に, 3 次スカラー形状関数の勾配場が, 表 5 のベクトル形状関数で展開できることを (19) に示す.

$$\begin{pmatrix} \nabla L_1^3 \\ \nabla L_2^3 \\ \nabla L_3^3 \\ \nabla L_2^2 L_3 \\ \nabla L_2 L_3^2 \\ \nabla L_1^2 L_3 \\ \nabla L_1 L_3^2 \\ \nabla L_1^2 L_2 \\ \nabla L_1 L_2^2 \\ \nabla L_1 L_2 L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2^2 \mathbf{W}_1 \\ L_2 L_3 \mathbf{W}_1 \\ L_3^2 \mathbf{W}_1 \\ L_1^2 \mathbf{W}_2 \\ L_1 L_3 \mathbf{W}_2 \\ L_3^2 \mathbf{W}_2 \\ L_1^2 \mathbf{W}_3 \\ L_1 L_2 \mathbf{W}_3 \\ L_2^2 \mathbf{W}_3 \\ L_2^2 \mathbf{W}_2 \\ L_2 L_3 \mathbf{W}_2 \\ L_1 L_2 \mathbf{W}_2 \\ L_1 L_3 \mathbf{W}_3 \\ L_2^2 \mathbf{W}_3 \\ L_1 L_3 \mathbf{W}_3 \\ L_2 L_3 \mathbf{W}_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

また, 表 5 のベクトル形状関数の回転場を (20) に示す.

$$\begin{pmatrix} \nabla \times (L_2^2 \mathbf{W}_1) \\ \nabla \times (L_2 L_3 \mathbf{W}_1) \\ \nabla \times (L_3^2 \mathbf{W}_1) \\ \nabla \times (L_1^2 \mathbf{W}_2) \\ \nabla \times (L_1 L_3 \mathbf{W}_2) \\ \nabla \times (L_3^2 \mathbf{W}_2) \\ \nabla \times (L_1^2 \mathbf{W}_3) \\ \nabla \times (L_1 L_2 \mathbf{W}_3) \\ \nabla \times (L_2^2 \mathbf{W}_3) \\ \nabla \times (L_2 L_3 \mathbf{W}_2) \\ \nabla \times (L_1 L_2 \mathbf{W}_2) \\ \nabla \times (L_3^2 \mathbf{W}_3) \\ \nabla \times (L_1 L_3 \mathbf{W}_3) \\ \nabla \times (L_2 L_3 \mathbf{W}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^2 \mathbf{K} \\ L_1 L_2 \mathbf{K} \\ L_2^2 \mathbf{K} \\ L_1 L_3 \mathbf{K} \\ L_2 L_3 \mathbf{K} \\ L_3^2 \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (20)$$

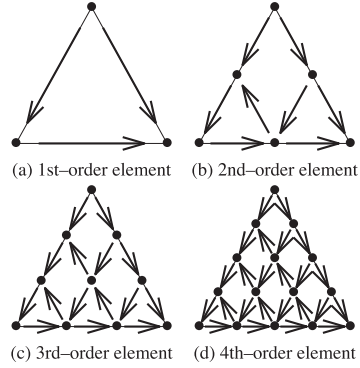


図 10 三角形不完全型要素のスカラー自由度 (●) とベクトル自由度 (→)

Fig. 10 Scalar (●) and vector (→) unknowns of incomplete-type triangular elements.

(20) の右辺の自由度は 6 で, これは表 3 の非零空間の部分空間 $\mathbf{S}_e^1, \mathbf{S}_f^2$, 及び \mathbf{S}_f^3 の自由度の和と一致する. すなわち, 三角形不完全型 k 次要素は k 次単項式から成るスカラー形状関数と, $(k-1)$ 次単項式と回転ベクトルから成るベクトル形状関数の対である.

更に, 三角形不完全型 1~4 次要素のスカラー自由度 (●) とベクトル自由度 (→) を図 10 に示す.

5. 長方形要素

長方形要素のスカラー形状関数として, ラグランジェ系列とセレンディピティ系列がよく知られている. ラグランジェ系列では, 長方形要素に格子状に自由度が配置されている. 一方, セレンディピティ系列では長方形の縁にのみ自由度が配置されており, 要素内に自由度が存在しないのが特徴である. よって, 同一次数の長方形要素においてセレンディピティ系列は, ラグランジェ系列に比べて最も自由度が低減化されていることになる. そのため, ラグランジェ系列とセレンディピティ系列の間には他に多くの系列が考えられる. ここでは, 次数 k に加えて型番 n を用いることによって, 長方形要素の形状関数を統一的に扱う. ただし, $1 \leq n \leq k$ である. 以下, この要素を長方形 n 型 k 次要素と呼ぶことにする.

5.1 スカラー形状関数

長方形要素の座標 $P(x, y)$ は (6) と (7) の二つの線座標で表せることから, それぞれ別々の次数を与えることもできるが, ここでは同一とする.

まず, スカラー要素の形状関数の構成法を示す. 表 6 に示すクラス別の x 次数と y 次数の双多項式の中から

表 6 長方形スカラ要素の各クラスにおける x, y 次数
Table 6 x, y -degrees of each class in rectangular scalar elements.

class	x -degree	y -degree	degree of freedom
①~④	$k - n + 1$	$k - n + 1$	4
⑤, ⑥	k	$k - n + 1$	$2(k - 1)$
⑦, ⑧	$k - n + 1$	k	$2(k - 1)$
⑨	$k - n + 1$	$k - n + 1$	$(k - n)^2$

$\dim\{\text{scalar}\} = 4k + (k - n)^2$

表 7 長方形要素のスカラ形状関数
Table 7 Scalar shape functions of rectangular elements.

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
①	}	①	}	①	}	①	}	①	}
②		②		②		②			
③		③		③		③			
④		④		④		④			

(a) $k = 1, n = 1$. (b) $k = 2, n = 1$. (c) $k = 2, n = 2$.

表 8 長方形ベクトル要素の各クラスにおける x, y 次数
Table 8 x, y -degrees of each class in rectangular vector elements.

class	x -degree	y -degree	unit vector	degree of freedom
⑤, ⑥	$k - 1$	$k - n + 1$	$\nabla\xi_2$	$2k$
⑦, ⑧	$k - n + 1$	$k - 1$	$\nabla\eta_2$	$2k$
⑨	$k - n$	k	$\nabla\xi_2$	$(k - 1)(k - n + 1)$
⑩	k	$k - n$	$\nabla\eta_2$	$(k - 1)(k - n + 1)$

$\dim\{\text{vector}\} = 4k + 2(k - 1)(k - n + 1)$

ら、図 8(b) の各クラスに相当する部分の単項式を取り出して形状関数として採用する。例えば、⑤、⑥に属する形状関数の x 次数は n に依存しないが、 y 次数は n に依存する。⑦、⑧に属する形状関数に関してはその逆である。よって、⑤~⑧の辺の自由度はいずれも $k - 1$ で、次数 k のみに依存する。一方、⑨の面に属する形状関数の自由度は k と n に依存する。

表 7 に、長方形 1 型 1 次要素、長方形 1 型 2 次要素、及び長方形 2 型 2 次要素のスカラ形状関数を示す。長方形 1 型 1 次要素では、⑤~⑨の形状関数は存在しない。また、長方形 1 型 2 次要素では、全ての形状関数の指数の和が 4 ($= 2k$) になっていることが分かる。一方、長方形 2 型 2 次要素では⑨の形状関数が存在せず、形状関数の指数の和がそれぞれ異なる。

5.2 ベクトル形状関数

ベクトル要素はスカラ要素と異なり、①~④が存在しない。また、表 8 のクラス⑩は図 8(b) では⑨に属するが、勾配ベクトルが異なるため⑩としている。

表 9 長方形要素のベクトル形状関数

Table 9 Vector shape functions of rectangular elements.

	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
⑤	}	⑤	}	⑤	}	⑤	}
⑥		⑥		⑥		⑥	
⑦		⑦		⑦		⑦	
⑧		⑧		⑧		⑧	

(a) $k = 1, n = 1$. (b) $k = 2, n = 1$. (c) $k = 2, n = 2$.

表 9 に、長方形 1 型 1 次要素、長方形 1 型 2 次要素、及び長方形 2 型 2 次要素のベクトル形状関数を示す。更に、ベクトル形状関数の回転場の自由度 $\dim\{\text{rot}\}$ は (21) のように与えられる [16]。

$$\begin{aligned} \dim\{\text{rot}\} &= \dim\{\text{vector}\} - \dim\{\text{scalar}\} + 1 \\ &= k^2 - (n - 1)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

次に、表 7(c) のスカラ形状関数が、表 9(c) のベクトル形状関数によって展開できることを (22) に示す。

$$\begin{pmatrix} \nabla\xi_1\eta_1 \\ \nabla\xi_2\eta_1 \\ \nabla\xi_1\eta_2 \\ \nabla\xi_2\eta_2 \\ \nabla\xi_1\xi_2\eta_1 \\ \nabla\xi_1\xi_2\eta_2 \\ \nabla\xi_1\eta_1\eta_2 \\ \nabla\xi_2\eta_1\eta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1\eta_1\nabla\xi_2 \\ \xi_2\eta_1\nabla\xi_2 \\ \xi_1\eta_2\nabla\xi_2 \\ \xi_2\eta_2\nabla\xi_2 \\ \xi_1\eta_1\nabla\eta_2 \\ \xi_1\eta_2\nabla\eta_2 \\ \xi_2\eta_1\nabla\eta_2 \\ \xi_2\eta_2\nabla\eta_2 \\ \xi_1\xi_2\nabla\eta_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

表 9(c) のベクトル形状関数の回転場を、(23) に示す。ただし、 $\mathbf{K} = \nabla\xi_2 \times \nabla\eta_2$ である。

$$\begin{pmatrix} \nabla \times (\xi_1\eta_1\nabla\xi_2) \\ \nabla \times (\xi_2\eta_1\nabla\xi_2) \\ \nabla \times (\xi_1\eta_2\nabla\xi_2) \\ \nabla \times (\xi_2\eta_2\nabla\xi_2) \\ \nabla \times (\xi_1\eta_1\nabla\eta_2) \\ \nabla \times (\xi_1\eta_2\nabla\eta_2) \\ \nabla \times (\xi_2\eta_1\nabla\eta_2) \\ \nabla \times (\xi_2\eta_2\nabla\eta_2) \\ \nabla \times (\xi_1\eta_1\nabla\xi_2) \\ \nabla \times (\xi_1\xi_2\nabla\eta_2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \xi_2\mathbf{K} \\ \eta_2\mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (23)$$

(23) の右辺の自由度は 3 で、(21) と一致する。

長方形 1 型 1 次 ~ 4 次要素のスカラ自由度 (●) とベ

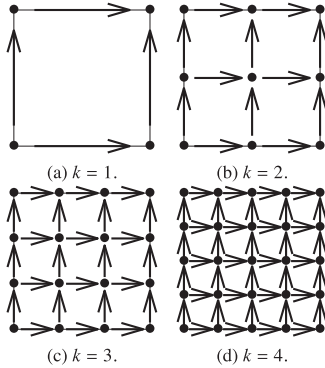


図 11 長方形 1 型要素のスカラ自由度 (●) とベクトル自由度 (→)

Fig. 11 Scalar (●) and vector (→) unknowns of first-type rectangular elements.

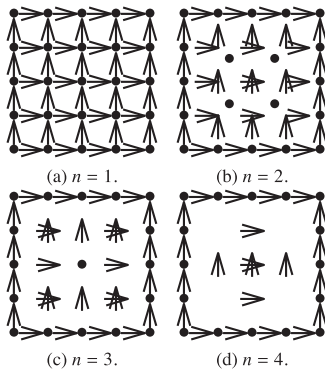


図 12 長方形 4 次要素のスカラ自由度 (●) とベクトル自由度 (→)

Fig. 12 Scalar (●) and vector (→) unknowns of 4th-order rectangular elements.

クトル自由度 (→) を, 図 11 に示す. スカラ自由度は格子状に配列しており, ベクトル自由度がこれらを結んでいる. よって, これらはラグランジェ系列に属する.

次に, 長方形 1 型~4 型 4 次要素のスカラ自由度 (●) とベクトル自由度 (→) を, 図 12 に示す. 図 12 (d) のスカラ自由度は要素の縁のみに存在するので, これはセレンディピティ系列に属する要素である. ベクトル自由度が要素内に存在する点が, スカラ要素の場合とは異なる.

6. む す び

本論文では, まず三角形要素の完全型, 及び不完全型の 2 系列について, 面積座標を用いてベクトル形状関数の構成法を示した. それぞれのベクトル形状関

数が張る空間は, ベクトル多項式空間の部分空間が異なっている. また, 長方形要素では次数に加えて型番を用いることによって統一的に扱った. 二つの線座標を用いた双多項式によって, スカラ形状関数とベクトル形状関数を構成した. 更に, スカラ形状関数の勾配場がベクトル形状関数によって過不足なく展開できることを示した. また, ベクトル形状関数の回転場の自由度についても検討した.

本論文では紙面の関係で, 要素内で同次数の形状関数のみ構成法を示した. そもそも, 要素のクラス分けは各クラスに異なる次数を与えるなど, 機能性要素の実現のためであった [18]. また, ここで示した要素による中空金属導波管の固有値解析ではスプリアス解は生じなかった [18].

文 献

- [1] P. Daly, "Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element methods," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.MTT-19, no.1, pp.19-25, 1971.
- [2] A. Konrad, "Vector variational formulation of electro-magnetic fields in anisotropic media," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.MTT-24, no.9, pp.553-559, 1976.
- [3] A. Konrad, "High-order triangular finite elements for electromagnetic waves in anisotropic media," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.MTT-25, no.5, pp.353-360, 1977.
- [4] J.C. Nedelec, "Mixed finite elements in \mathbf{R}^3 ," *Numer. Math.*, vol.35, pp.315-341, 1980.
- [5] A. Bossavit and J.C. Verite, "A mixed FEM-BIEM method to solve 3-D eddy current problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol.MAG-18, no.2, pp.431-435, 1982.
- [6] M.L. Barton and Z.J. Cendes, "New vector finite element for three-dimensional magnetic field computation," *J. Appl. Phys.*, vol.60, no.8, pp.3919-3921, 1987.
- [7] 羽野光夫, "新しい三角形要素を用いたベクトル有限要素法による異方性導波路の解析," *信学論 (C)*, vol.J70-C, no.10, pp.1329-1337, Oct. 1987.
- [8] 羽野光夫, "3次元共振器問題の有限要素法解析 —四面体要素の場合," *信学論 (C)*, vol.J71-C, no.3, pp.333-338, March 1988.
- [9] A. Ahagon, K. Fujiwara, and T. Nakata, "Comparison of various kinds of edge elements for electromagnetic field analysis," *IEEE Trans. Magn.*, vol.32, no.3, pp.898-901, 1996.
- [10] J.P. Webb, "Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.47, no.8, pp.1244-1253, 1999.
- [11] Z. Ren and N. Ida, "High order differential form-based elements for the computation of electro-

- magnetic field,” IEEE Trans. Magn., vol.36, no.4, pp.1472–1477, 2000.
- [12] M. Hano, H. Komatsu, and K. Taniguchi, “Systematic construction of three-dimensional ultra high-order nedelec’s elements,” IEEE Trans. Magn., vol.36, pp.1623–1626, 2000.
- [13] M. Hano, “Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides,” IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.MTT-32, no.10, pp.1275–1279, 1984.
- [14] 羽野光夫, “3次元共振器問題の有限要素法解析—直方体要素の場合,” 信学論 (C), vol.J70-C, no.6, pp.791–796, June 1987.
- [15] 羽野光夫, 廣石堯之, 堀田昌志, “電磁界解析における高次ベクトル要素の部分空間と基底関数について,” 電気学会静止器・回転器合同研究会資料, SA-13-75, RM-13-89, pp.1-6, 2013.
- [16] 羽野光夫, 岩崎圭祐, 古田隆貴, 堀田昌志, “電磁界解析における高次ベクトル要素の部分空間と基底関数について (その 7),” 電気学会静止器・回転器合同研究会資料, SA-16-79, RM-16-125, pp.127–132, 2016.
- [17] H. Whitney, Geometric Integration Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.
- [18] 羽野光夫, 岩崎圭祐, 古田隆貴, 堀田昌志, “二次元有限要素法におけるスプリアス解の発生しない機能性要素,” 電学論 (B), vol.137, no.3, pp.186–194, 2016.
- [19] 水本久夫, 原平八郎, エンジニアリングサイエンスのための有限要素法 理論編, 森北出版, p.132, 1983.
- (平成 29 年 9 月 25 日受付, 30 年 4 月 11 日公開)



羽野 光夫

1974 年山口大学工学部電気工学科卒業。
1976 年同大学院工学研究科修士課程電気工学専攻修了。同年同大学理学部物理学科助手。1979 年同大学工学部電気工学科助手。1985 年同講師。1989 年同助教授。2002 年同教授。2017 年名誉教授、現在に至る。1984 年工学博士。1994～1995 年米国 University of California, Los Angeles 校客員研究員。電磁界の数値解析とその応用に関する研究に従事。IEEE, 電気学会各会員。