辺容量付き電力需給ネットワーク*

丸田　真平[†a)]　　西関　隆夫[†b)]

Parametric Power Supply Networks with Edge-Capacities*

Shimpei MARUTA[†a)] and Takao NISHIZEKI[†b)]

あらまし　辺容量付き電力需給ネットワークはグラフ G で表現できる．G の各点は供給点あるいは需要点であり，供給量あるいは需要量が割当てられており，各辺には辺容量が割当てられている．パラメトリックネットワークでは，供給量，需要量及び辺容量は変数 λ の関数である．各需要点は，丁度一つの供給点からグラフ G の辺を通してその需要量だけの "電力" を受け取りたい．一方，各供給点は，幾つかの需要点へ G の辺を通して "電力" を送ることができるが，送る電力の合計はその供給量以下である．無論各辺を流れる電力フローはその辺の容量以下でなければならない．このようなことが可能かどうか調べたい．また不可能ならば，全ての需要量を一様に $r(0 \le r < 1)$ 倍に減少させて，そのようなことを可能にしたい．このような r の最大値 r^* を求めたい．本論文では，木であるグラフ G に対してこれらの問題を解くアルゴリズムを与える．

キーワード　アルゴリズム，木，最大供給率問題，パラメトリックネットワーク，分割問題

1. まえがき

辺容量付き電力需給ネットワークはグラフ G で表現できる．G の各点は供給点あるいは需要点であり，供給量あるいは需要量が割当てられており，各辺には容量が割当てられている．（G に供給点が複数ありえることが，通常のネットワークフロー問題と大きく異なる．）供給点 v の供給量を s_v と表し，需要点 v の需要量を d_v と表し，辺 e の容量を c_e と表す．**定常ネットワーク**では，供給量，需要量及び辺容量が全て非負の整定数である．一方，**パラメトリックネットワーク**では，供給量，需要量及び辺容量は，時刻，気温，原油価格などを変数 λ とする関数である [1]～[6]．このとき供給点 v の供給量を $s_v(\lambda)$ と表し，需要点 v の需要量を $d_v(\lambda)$ と表し，辺 e の容量を $c_e(\lambda)$ と表す．グラフ G が木である定常ネットワーク及びパラメトリックネットワークを，それぞれ **定常木ネットワーク** 及び **パラメトリック木ネットワーク** と呼ぶ．図 1 の定常木ネットワークにおいて，供給点は正方形で，需要点は円で描かれており，供給量や需要量はその内側に書かれており，辺は直線分で描かれており，辺にその容量が付けられている．図 2(a) はパラメトリック木ネットワークを表しており，その λ とともに変動する需要量 $d_{v_3}(\lambda)$, $d_{v_4}(\lambda)$ 及び辺 $e=(v_3, v_5)$ の容量 $c_e(\lambda)$ は図 2(b) に描かれている．

各需要点 v は，丁度 d_v だけの "電力" を一つの供給点からグラフ G の辺を通して受け取りたい．一方，各供給点 v は G の辺を通して幾つかの需要点へ "電力" を送ることができるが，送る電力の合計はその供給量 s_v 以下でなければならない．このとき，グラフ G から何本か辺を除去して G を幾つかの連結成分に分割して，各成分には供給点が丁度一つ含まれ，その供給点からその成分内の各需要点へその需要量だけの電力フローを流し，しかも各辺を流れるフローはその容量以下であるようにしたい．（除去された辺にはフローは流れない．）このような分割はグラフ G の**許容分割**と呼ばれている [4], [7]．定常ネットワークの**分割問題**は与えられたグラフ G に許容分割があるかどうかを問う．パラメトリックネットワークの**分割問題**では，許容分割をもつ変数値 λ の全てを見つけたい．もし定常ネットワーク G に許容分割がないならば，$0 \le r < 1$ なる実数 r を用い，全ての需要量 d_v を一様に r 倍に減少させて，新しい需要量を $d'_v = r \cdot d_v$ としたときに，G

† 関西学院大学理工学部情報科学科，三田市
Kwansei Gakuin University, 2–1 Gakuen, Sanda-shi, 669–1337 Japan
a) E-mail: auf10083@gmail.com
b) E-mail: nishi@kwansei.ac.jp
* 本論文は学生論文特集秀逸論文である．

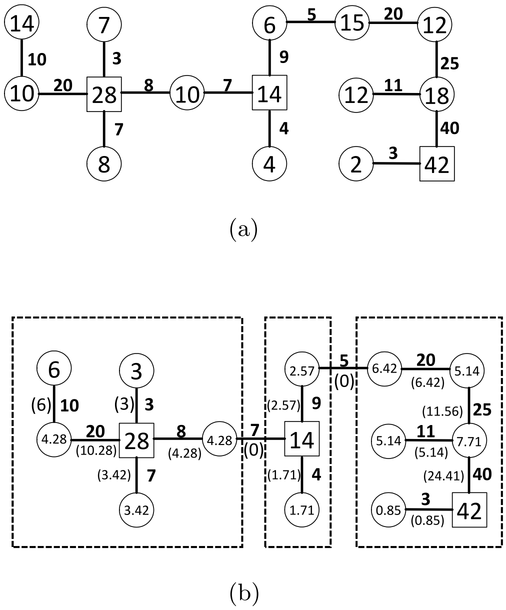

図 1 (a) 許容分割のない辺容量付き木ネットワーク T, (b) 最大供給率 $r^* = 3/7$ に対する新しいネットワークとその許容分割
Fig. 1 (a) Steady tree network T with no feasible partition, and (b) new network constructed from T for the maximum supply rate $r^* = 3/7$.

に許容分割があるようにしたい．このような r の最大値 r^* を見つけたい．この r^* を**最大供給率**と呼び，r^* を計算する問題を**最大供給率問題**と呼ぶ [4]．

図 1(a) の木 T には許容分割がなく，T の最大供給率 r^* は 3/7 である．T の各需要量を新たに $d'_v = (3/7) \cdot d_v$ にした新しい木を図 1(b) に示す．新しい木の許容分割は図 1(b) で点線で表されている．各辺に付けられた括弧の中の数字は，その辺を流れるフローの値である．

分割問題は定常直並列ネットワークに対してすら NP 完全であるので [8]，最大供給率問題は NP 困難である．したがって，どちらの問題も，定常直並列ネットワークに対してすら多項式時間では解くことができそうもない．定常木ネットワークに限定すれば，分割問題は線形時間で解くことができる [8], [9]．一方，辺容量がないならば，定常木ネットワークの最大供給率問題が多項式時間で解け，パラメトリック木ネットワークの分割問題が擬多項式時間で解けることが知られている [4]．しかし，辺容量がある場合のアルゴリズムは知られていなかった．

本文では，まず文献 [4] のアルゴリズムを拡張して，辺容量があっても定常木ネットワーク T の最大供給率問題が多項式時間で解けることを示す．T の点数を n とし，T の対数サイズ（すなわち T の供給量や需要量である整数を二進数表現したときのビット数の総和）を L とすると，そのアルゴリズムの計算時間は $O(nL)$ である．次に，辺容量付きパラメトリック木ネットワークに対する分割問題を解くアルゴリズムを与える．供給量，需要量及び辺容量が整数係数をもつ区分的線形関数であるとき，そのアルゴリズムの計算時間は擬多項式である．より正確にいうと，全ての需要量，供給量及び辺容量の整数係数の絶対値の合計を W とすると，そのアルゴリズムの計算時間は $O(nW^2)$ である．

2. 定常木ネットワークの最大供給率問題

この節では，辺容量付き定常木ネットワークの最大供給率問題が多項式時間で解けることを示す．

$T = (V, E)$ を辺容量付き定常木ネットワークとする．V は木 T の点集合であり，E は T の辺集合である．全ての供給点からなる集合を V_{s} とし，全ての需要点からなる集合を V_{d} とする．無論，$V = V_{\mathrm{s}} \cup V_{\mathrm{d}}$ であり，$V_{\mathrm{s}} \cap V_{\mathrm{d}} = \emptyset$ である．$n = |V|$，$n_{\mathrm{s}} = |V_{\mathrm{s}}|$ とする．定常木ネットワーク T の**許容分割**$\pi = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_{\mathrm{s}}})$ とは，集合 V の n_{s} 個の部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_{n_{\mathrm{s}}}$ への分割であり，$1 \leq i \leq n_{\mathrm{s}}$ なる各 i について次の (a) 及び (b) を満足するものである．

(a) V_i は T の連結部分グラフ，すなわち部分木 T_i を誘導し，V_i は丁度一つの供給点 u を含み，$\sum_{v \in V_i/\{u\}} d_v \leq s_u$ である．

(b) 部分木 T_i の各辺 $e = (v, w)$ を流れるフローの値 ψ_e は e の容量 c_e 以下である．すなわち $\psi_e \leq c_e$ である．なお，$\psi_e = \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} d_x$ である．ただし，部分木 T_i を供給点 u を根とする根付き木とみなしたときに辺 e の端点 v が端点 w の親であるとき，点 w 及び w の全ての子孫からなる集合を $\mathrm{Des}(w)$ とする．

分割問題は，与えられた木 T の許容分割を見つける問題である．辺容量付き定常木ネットワークに対する分割問題を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムは既に知られている [9]．そのアルゴリズムを **Partition** と呼ぶ．**Partition** を繰り返し用いて，最大供給率問題を解く．

木 T の**最大供給率問題**は，全ての需要点 v の需要量 d_v を新しい需要量 $d'_v = r \cdot d_v$ に置き換えたとき，T に許容分割があるような r の最大値 r^* を求める問

題である．r^* は T の**最大供給率**と呼ばれる．r^* は 1 よりも大きいかもしれない．

明らかに次の補題が成り立つ．

補題 1. r は非負実数とし，木 T の全ての需要量 d_v を $d'_v = r \cdot d_v$ に置き換えたとき，T に許容分割が存在するとする．このとき $0 \leq r' \leq r$ なる任意の実数 r' に対して，全ての需要量 d_v を $d'_v = r' \cdot d_v$ に置き換えたとき，T に許容分割が存在する．

したがって，アルゴリズム **Partition** を用い，二分探索で r^* が計算できる．しかし，全ての非負実数集合上の二分探索で，最大供給率 r^* を計算しようとすると，r^* は正確に求まらないか，あるいは多項式時間で計算が終了しない．提案手法のアイディアは，r^* が有理数であることに注意することである．

補題 2. $T = (V, E)$ は定常木ネットワークであるとし，$S = \prod_{v \in V_s} s_v$，$D = \sum_{v \in V_d} d_v$，$C = \prod_{e \in E} c_e$ とすると，T の最大供給率 r^* は

$$r^* \in \{C \cdot S/z \mid z \text{ は整数であり}, C \cdot D \cdot S \geq z \geq 0\}$$

である．

証明 r^* は T の最大供給率であるとする．このとき点集合 V は部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_{n_s}$ に分割でき，$1 \leq i \leq n_s$ なる各 i について V_i は木 T の部分木 T_i を誘導し，V_i には丁度一つの供給点 u があり，$\sum_{v \in V_i/\{u\}} r^* \cdot d_v \leq s_u$ であり，部分木 T_i の各辺 e に対して $\psi_e \leq c_e$ である．r^* は最大供給率なので，$1 \leq i \leq n_s$ なるある i について次の条件 (i) あるいは (ii) が成立する．

(i) 不等式 $\sum_{v \in V_i/\{u\}} r^* \cdot d_v \leq s_u$ が等号で成立する．すなわち $\sum_{v \in V_i/\{u\}} r^* \cdot d_v = s_u$ である．

(ii) T_i のある辺 $e' = (v, w)$ について，不等式 $\psi_e \leq c_e$ が等号で成立する．すなわち $\psi_{e'} = c_{e'}$ である．ここで $\psi_{e'} = \sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} r^* \cdot d_x$ である．

なぜならば，どの i についても条件 (i) も (ii) も成立しないとすると，r^* は最大供給率ではないことになってしまうからである．

z^* を $z^* = C \cdot S/r^*$ とおく．条件 (i) が成立するとき

$$z^* = \prod_{e \in E} c_e \cdot \left(\sum_{v \in V_i/\{u\}} d_v \right) \cdot \left(\frac{\prod_{v \in V_s} s_v}{s_u} \right)$$

であり，z^* は整数であり，$0 \leq z^* \leq C \cdot D \cdot S$ である．

条件 (ii) が成立するとき

$$z^* = \left(\frac{\prod_{e \in E} c_e}{c_{e'}} \right) \cdot \left(\sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} d_x \right) \cdot \prod_{v \in V_s} s_v$$

であり，z^* は整数であり，$0 \leq z^* \leq C \cdot D \cdot S$ である．このように，どちらの場合にも，$0 \leq z \leq C \cdot D \cdot S$ なるある整数 z に対し，$r^* = C \cdot S/z$ である． □

有理数の集合 $\{C \cdot S/z \mid C \cdot D \cdot S \geq z \geq 0\}$ の要素数は $C \cdot D \cdot S + 1$ である．（辺容量がない場合の集合の要素数は $D \cdot S + 1$ であった [4].）辺容量付きの定常木ネットワーク $T = (V, E)$ の最大供給率 r^* は，この有限集合上の二分探索と線形時間判定アルゴリズム **Partition** を用いて，$O(n \log_2(C \cdot D \cdot S))$ 時間で計算することができる．辺容量付き定常木ネットワーク T の**対数サイズ**L は，

$$L = \sum_{e \in E} \lceil \log_2(c_e + 2) \rceil + \sum_{v \in V_d} \lceil \log_2(d_v + 2) \rceil + \sum_{v \in V_s} \lceil \log_2(s_v + 2) \rceil$$

であるので，明らかに，$\log_2(C \cdot D \cdot S) \leq L$ であり，次の定理を得る．

定理 1 T は辺容量付きの定常木ネットワークとし，n を T の点数とし，L を T の対数サイズとすると，T に対する最大供給率問題は $O(nL)$ 時間で解くことができる．

3. パラメトリック木ネットワークの分割問題

この節では，辺容量付きのパラメトリック木ネットワーク T に対する分割問題を解くアルゴリズムを与える．

3.1 定 義

一般性を失わずに，与えられた木 T は任意に選んだ点 v_{root} を根とする根付き木であるとしてよい．更に，T の各点 v の供給量 $s_v(\lambda)$，需要量 $d_v(\lambda)$ 及び各辺 e の容量 $c_e(\lambda)$ は，非負実数の変数 $\lambda (\geq 0)$ の関数であるとする．また，T には供給点が n_s 個あるとする．

根付き木ネットワーク $T = (V, E)$ の変数値 λ に対する**許容分割**$\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_s})$ は，V の n_s 個の部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_{n_s}$ への分割であり，次の条件 (a)−(c) を満足するものである．

(a) T の根 v_{root} は V_1 に含まれる．すなわち $v_{\mathrm{root}} \in V_1$

である．

(b) $1 \leq i \leq n_{\rm s}$ なる各添字 i について，V_i は丁度一つの供給点 u を含み，V_i は T の部分木 T_i を誘導し，$\sum_{v \in V_i/\{u\}} d_v(\lambda) \leq s_u(\lambda)$ である．

(c) 各部分木 T_i の各辺 e を流れるフローの値 $\psi_e(\lambda)$ は $\psi_e(\lambda) \leq c_e(\lambda)$ である．

パラメトリック木ネットワーク T の**分割問題**とは，T が許容分割をもつ変数値 λ の全てを見つける問題である．そのような変数値 λ の集合は幾つかの実数区間からなるので，実際にはそのような全ての区間からなる集合を見つける．

図 2(a) のパラメトリック木ネットワーク T では，$v_5 = v_{\rm root}$ であり，$s_{v_1}(\lambda) = 8$, $s_{v_2}(\lambda) = 7$, $d_{v_5}(\lambda) = 2$ であり，辺 (v_1, v_3)，(v_2, v_4)，(v_4, v_5) の容量は定数であり，それぞれ 11，7，10 である．変動する需要量 $d_{v_3}(\lambda)$，$d_{v_4}(\lambda)$ 及び辺 $e = (v_3, v_5)$ の容量 $c_e(\lambda)$ は図 2(b) に描かれている．図 2(a) で点線で示した分割 $\pi_\lambda = (\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4, v_5\})$ は，$0 \leq \lambda \leq 5$ なる λ に対する T の許容分割である．T に対する分割問題の解は [0,7] と [10,∞) の二つの区間からなる集合である．

値 λ に対する T の許容分割を $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n_{\rm s}})$ とする．$1 \leq i \leq n_s$ なる各 i について V_i には丁度一つの供給点が含まれている．u を V_1 に含まれる供給点としたとき，**許容分割 π_λ の余裕** ${\rm surp}(\pi_\lambda)$ を

$$
{\rm surp}(\pi_\lambda) = {\rm s}_u(\lambda) - \sum_{v \in V_1/\{u\}} d_v(\lambda)
$$

と定義する．**パラメトリック木 T の余裕 $f_T(\lambda)$** を

$$
f_T(\lambda) = \max_{\pi_\lambda} \ {\rm surp}(\pi_\lambda)
$$

と定義する．ただし，値 λ に対する T の全ての許容分割 π_λ にわたって ${\rm surp}(\pi_\lambda)$ の最大値をとるものとする．値 λ に対して T が許容分割をもたないならば，$f_T(\lambda) = -\infty$ とする．直感的には，辺容量条件を満足させながら T の全ての需要点に電力を供給したとき，根 $v_{\rm root} \in V_1$ から T の外へ出力できる電力量の最大値が，T の余裕 $f_T(\lambda)$ である．(図 2(a) の T に対する $f_T(\lambda)$ を図 2(c) に示す．) $f_T(\lambda) \geq 0$ なる λ の区間全てからなる集合が分割問題の解である．

根付き木 T に基づく動的計画法を用いて T の許容分割を見つける．より詳しくは，許容分割とその拡張である "根許容分割" を小さい部分木から大きい部分

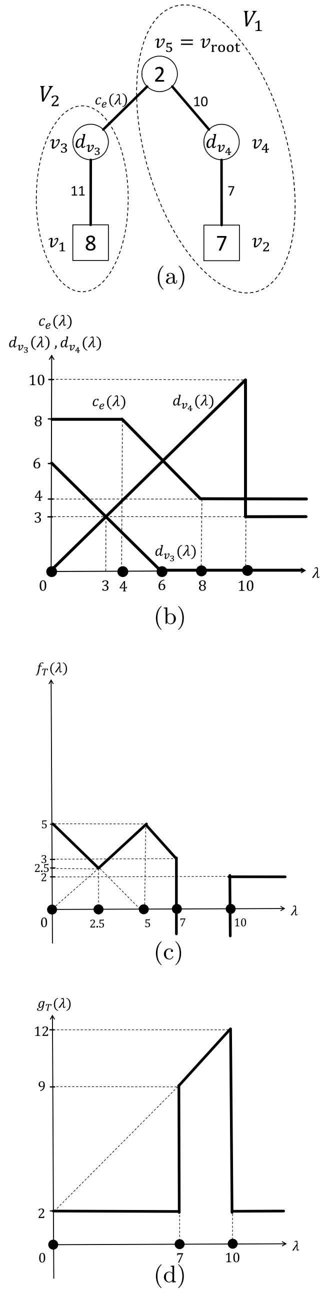

図 2　(a) v_5 を根とする辺容量付きパラメトリック木ネットワーク T，(b) 変動する需要量 $d_{v_3}(\lambda)$，$d_{v_4}(\lambda)$ 及び辺容量 $c_e(\lambda)$，(c) T の余裕 $f_T(\lambda)$，(d) T の不足 $g_T(\lambda)$

Fig. 2　(a) Parametric tree network T rooted at v_5, (b) variable demands $d_{v_3}(\lambda)$, $d_{v_4}(\lambda)$ and capacity $c_e(\lambda)$, (c) surplus $f_T(\lambda)$, and (d) deficit $g_T(\lambda)$ of T.

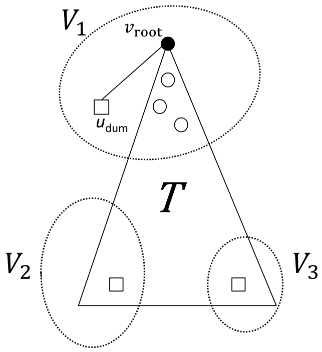

図 3　木 T にダミーの供給点と辺を付加して得られる木 T_{dum}
Fig. 3　Tree T_{dum} obtained from T by adding a dummy supply vertex and a dummy edge.

木へと繰り返し求めていく．

図 3 のように，木 T の根 v_{root} の新しい子としてダミーの供給点 u_{dum} を付け加え，その供給量を ∞ とし，u_{dum} と v_{root} をダミーの辺で結び，その辺の容量を ∞ とする．こうして得られた木を T_{dum} とする．T_{dum} には供給点が $n_{\mathrm{s}}+1$ 個ある．T_{dum} の許容分割 $\pi_\lambda=(V_1,V_2,\cdots,V_{n_{\mathrm{s}}+1})$ で，$v_{\mathrm{root}},u_{\mathrm{dum}}\in V_1$ なる π_λ を，T の**根許容分割**と呼ぶ．したがって，T に根許容分割があるならば，v_{root} は需要点である．また，v_{root} が供給点ならば，T は根許容分割をもたない．（図 2(a) の木 T に対して，$\pi_\lambda=(\{v_{\mathrm{root}},u_{\mathrm{dum}}\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_4\})$ は $0\le\lambda\le 7$ なる λ に対する根許容分割である.）

根許容分割 $\pi_\lambda=(V_1,V_2,\cdots,V_{n_{\mathrm{s}}+1})$ の**不足** $\mathrm{def}(\pi_\lambda)$ を

$$\mathrm{def}(\pi_\lambda)=\sum_{v\in V_1/\{u_{\mathrm{dum}}\}} d_v(\lambda)$$

と定義する．**パラメトリック木** T **の不足** $g_T(\lambda)$ を

$$g_T(\lambda)=\min_{\pi_\lambda}\ \mathrm{def}(\pi_\lambda)$$

と定義する．ただし，値 λ に対する T の全ての根許容分割 π_λ にわたって $\mathrm{def}(\pi_\lambda)$ の最小値をとるものとする．値 λ に対して T が根許容分割をもたないならば，$g_T(\lambda)=+\infty$ とする．このようにして，v_{root} が供給点であるとき，任意の値 λ に対して T は根許容分割をもたないので，$g_T(\lambda)=+\infty$ である．直感的には，v_{root} を含む幾つかの需要点が木 T の外から電力を供給されるときに v_{root} を通して T に入力されなければならない電力量の最小値が，T の不足 $g_T(\lambda)$ である．（図 2(a) の T に対する不足 $g_T(\lambda)$ を図 2(d) に示す.）

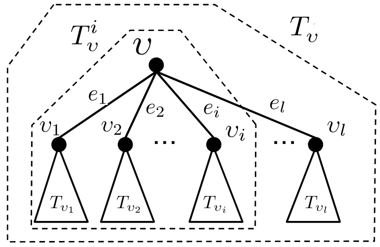

図 4　根付き部分木
Fig. 4　Rooted subtrees.

T の根付き部分木 T' に対しても余裕 $f_{T'}(\lambda)$ と不足 $g_{T'}(\lambda)$ を同様に定義する．

T の点 v を根とする T の最大部分木を T_v と表す．点 v の子を $v_1,v_2,\cdots,v_l$ とし，$1\le i\le l$ なる各 i に対し，v と v_i を結ぶ辺を e_i とし，v_i を根とする T の最大部分木を T_{v_i} とする．点 v と，辺 $e_1,e_2,\cdots,e_i$ と，部分木 $T_{v_1},T_{v_2},\cdots,T_{v_i}$ からなる T_v の部分木を T_v^i と書く．図 4 で T_v と T_v^i は点線で囲まれている．明らかに $T_v=T_v^l$ である．点 v だけからなる部分木を特に T_v^0 と書く．

3. 2　アルゴリズム

以下の (i) − (iii) で示すように，本文のアルゴリズムは動的計画法を用いて，T の各点 v に対し，葉から根に向かって，T_v の余裕 $f_{T_v}(\lambda)$ と不足 $g_{T_v}(\lambda)$ を計算する．$T=T_{v_{\mathrm{root}}}$ の余裕 $f_T(\lambda)$ から，$f_T(\lambda)\ge 0$ であるような非負実数 λ の区間全てを容易に見つけることができる．パラメトリック木ネットワークの分割問題の解として，これら全ての区間からなる集合を出力する．例えば図 2(a) のパラメトリック木 T に対しては，集合 {[0,7],[10,∞)} を出力する．

(i) まず次のように，T の各点 v に対して T_v^0 の余裕と不足を計算する．T_v^0 は点 v だけからなる．v が供給点ならば，全ての λ に対して $f_{T_v^0}(\lambda)=s_v(\lambda)$ であり，$g_{T_v^0}(\lambda)=+\infty$ である．v が需要点ならば，全ての λ に対して $f_{T_v^0}(\lambda)=-\infty$ であり，$g_{T_v^0}(\lambda)=d_v(\lambda)$ である．T の全ての葉 v に対して $T_v=T_v^0$ なので，このようにして葉 v に対する f_{T_v} と g_{T_v} は計算できる．

(ii) 次に T の各内点 v に対して，部分木 $T_v^i(1\le i\le l)$ の余裕と不足を，T_v^i の部分木 T_v^{i-1} と T_{v_i} の余裕と不足から計算する．ここで l は点 v の子の個数であり，$T_v=T_v^l$ である．図 5 のように，T_v^{i-1} の根 v

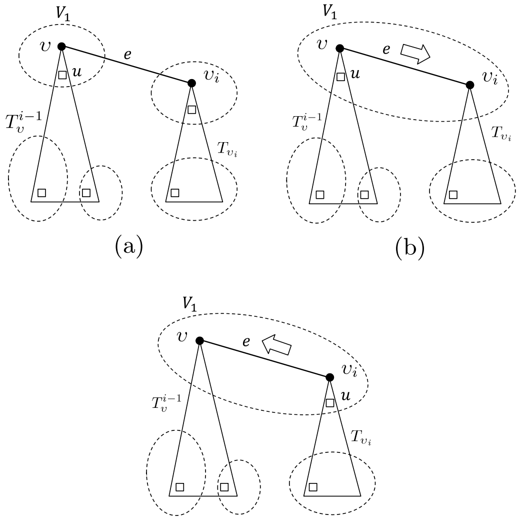

図 5　T_v^i の許容分割 π_λ.
Fig. 5　Feasible partitions π_λ of T_v^i.

と T_{v_i} の根 v_i を辺 $e=(v,v_i)$ で結んで T_v^i から得られる．

(ii-1) まず，T_v^i の余裕 $f_{T_v^i}$ の計算法を説明する．n_i を T_v^i の供給点の個数とする．$f_{T_v^i}(\lambda)\neq -\infty$ とする．すなわち値 λ に対して T_v^i は許容分割をもつとする．$f_{T_v^i}(\lambda)=\mathrm{surp}(\pi_\lambda)$ であるような T_v^i の許容分割を $\pi_\lambda=(V_1,V_2,\cdots,V_{n_i})$ とする．このとき図 5 のように，V_1 は T_v^i の根 v を含んでいる．同図で π_λ は点線で示され，供給点は正方形で表されている．次の三つの場合がある．

場合 (a)：$v_i\notin V_1$ であるとき．

この場合 $f_{T_{v_i}}(\lambda)\geq 0$ であり，T_v^i の許容分割 π_λ は T_v^{i-1} と T_{v_i} の許容分割を誘導する．すなわち T_v^i の点集合の分割 π_λ を，T_v^{i-1} の点集合及び T_{v_i} の点集合へそれぞれ（数学的意味で）“制約” したものは，T_v^{i-1} と T_{v_i} の許容分割である．（図 5(a) を参照．）この場合に対して $f_{T_v^{i-1}}$ と $f_{T_{v_i}}$ から次の関数 $f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda)=\begin{cases} f_{T_v^{i-1}}(\lambda) & (f_{T_{v_i}}(\lambda)\geq 0\text{ のとき}) \\ -\infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

辺 $e=(v,v_i)$ にはフローが流れていなく，$\psi_e(\lambda)=0$ である．

場合 (b)：$v_i\in V_1$ であり，V_1 の供給点 u が T_v^{i-1} に入っているとき．

このとき，$f_{T_v^{i-1}}(\lambda)\geq g_{T_{v_i}}(\lambda)$ かつ $\psi_e(\lambda)=g_{T_{v_i}}(\lambda)\leq c_e(\lambda)$ であり，v_i は需要点である．π_λ は T_v^{i-1} の許容分割と T_{v_i} の根許容分割を誘導する．（図 5(b) で辺 $e=(v,v_i)$ に付けられた矢印は e を流れるフローの向きを表している．）この場合に対して次の関数 $f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda)=\begin{cases} f_{T_v^{i-1}}(\lambda)-g_{T_{v_i}}(\lambda) \\ \qquad (f_{T_v^{i-1}}(\lambda)\geq g_{T_{v_i}}(\lambda)\text{ かつ} \\ \qquad g_{T_{v_i}}(\lambda)\leq c_e(\lambda)\text{ のとき}) \\ -\infty \qquad (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

場合 (c)：$v_i\in V_1$ であり，V_1 の供給点 u が T_{v_i} に入っているとき．

このとき，$g_{T_v^{i-1}}(\lambda)\leq f_{T_{v_i}}(\lambda)$ かつ $\psi_e(\lambda)=g_{T_v^{i-1}}(\lambda)\leq c_e(\lambda)$ であり，v は需要点である．π_λ は T_v^{i-1} の根許容分割と T_{v_i} の許容分割を誘導する．（図 5(c) を参照．）この場合に対して次の関数 $f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}(\lambda)=\begin{cases} -g_{T_v^{i-1}}(\lambda)+f_{T_{v_i}}(\lambda) \\ \qquad (g_{T_v^{i-1}}(\lambda)\leq f_{T_{v_i}}(\lambda)\text{ かつ} \\ \qquad g_{T_v^{i-1}}(\lambda)\leq c_e(\lambda)\text{ のとき}) \\ -\infty \qquad (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

上の三つの関数 $f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}(\lambda)$ から，$f_{T_v^i}(\lambda)$ は次のように計算できる．

$$f_{T_v^i}(\lambda)=\max\{f^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{b}}_{T_v^i}(\lambda), f^{\mathrm{c}}_{T_v^i}(\lambda)\}.$$

(ii-2) 次に T_v^i の不足 $g_{T_v^i}$ の計算法を説明する．$g_{T_v^i}(\lambda)\neq +\infty$ とする．すなわち値 λ に対して T_v^i は根許容分割をもつとする．T_v^i にある供給点の個数を n_i とする．T_v^i にダミーの供給点 u_{dum} を付け加えると，供給点の総数は n_i+1 になる．$g_{T_v^i}(\lambda)=\mathrm{def}(\pi_\lambda)$ であるような T_v^i の根許容分割を $\pi_\lambda=(V_1,V_2,\cdots,V_{n_i+1})$ とする．このとき図 6 のように V_1 は u_{dum} と T_v^i の根 v を含む．次の二つの場合がある．

場合 (a)：$v_i\notin V_1$ であるとき．

この場合，v は需要点であり，$f_{T_{v_i}}(\lambda)\geq 0$ でなければならず，π_λ は T_v^{i-1} の根許容分割と，T_{v_i} の許容分割を誘導する．（図 6(a) 参照．）この場合に対して次の関数 $g^{\mathrm{a}}_{T_v^i}$ を計算する．

$$g^{\mathrm{a}}_{T_v^i}(\lambda)=\begin{cases} g_{T_v^{i-1}}(\lambda) & (f_{T_{v_i}}(\lambda)\geq 0\text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

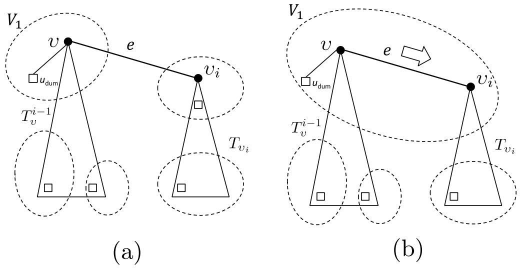

図 6　T_v^i の根許容分割 π_λ
Fig. 6　Root-feasible partitions π_λ of T_v^i.

辺 $e=(v,v_i)$ にフローは流れていない．

場合 (b)：$v_i \in V_1$ であるとき．

この場合，v 及び v_i は需要点であり，$g_{T_{v_i}}(\lambda) \neq +\infty$ でなければならず，$\psi_e(\lambda) = g_{T_{v_i}}(\lambda) \le c_e(\lambda)$ であり，π_λ は T_v^{i-1} 及び T_{v_i} の根許容分割を誘導する．(図 6(b) 参照.）この場合に対して次の関数 $g^{\rm b}_{T_v^i}$ を計算する．

$$g^{\rm b}_{T_v^i}(\lambda) = \begin{cases} g_{T_v^{i-1}}(\lambda) + g_{T_{v_i}}(\lambda) \\ \qquad\qquad (g_{T_{v_i}}(\lambda) \le c_e(\lambda) \text{ のとき}) \\ +\infty \quad (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

上の二つの関数 $g^{\rm a}_{T_v^i}$, $g^{\rm b}_{T_v^i}$ から $g_{T_v^i}$ は次のように計算できる．

$$g_{T_v^i}(\lambda) = \min\{g^{\rm a}_{T_{v_i}}(\lambda), g^{\rm b}_{T_{v_i}}(\lambda)\}.$$

(iii) T に含まれる $n-1$ 本の辺 $e=(v,v_i)$ の各々に対して (ii) の計算を繰り返して $f_T(\lambda)$ と $g_T(\lambda)$ を計算する．

3.3 計算時間

この節では全ての供給量，需要量及び辺容量が非負実数変数 λ の区分的線形関数であるとして，アルゴリズムの計算時間を解析する．

区分的線形関数 f の**折れ点**とは，f を表す折れ線の傾きが変わる λ の値と定義する．関数 f の折れ点の個数を $p(f)$ と表す．便宜上 $\lambda=0$ は f の折れ点であるとする．(例えば図 2 の $c_e(\lambda)$ と $f_T(\lambda)$ については，$p(c_e(\lambda))=3$ であり，$p(f_T(\lambda))=5$ である.）このときパラメトリック木ネットワーク $T=(V,E)$ の**サイズ**N は

$$N = \sum_{v\in V_{\rm s}} p(s_v(\lambda)) + \sum_{v\in V_{\rm d}} p(d_v(\lambda)) + \sum_{e\in E} p(c_e(\lambda))$$

である．P を次式で定義する．

$$P = \max\{\max_{T'} p(f_{T'}(\lambda)), \max_{T'} p(g_{T'}(\lambda))\}.$$

ただし，T の全ての根付き部分木 T' に渡り最大値をとるものとする．$f_{T'}(\lambda)$ と $g_{T'}(\lambda)$ が区分的線形関数であることに注意しよう．T の余裕 $f_T(\lambda)$ と不足 $g_T(\lambda)$ を解として出力する必要があるならば，そのサイズは P であることが多いので，そのときは P が出力サイズである．

点 v だけからなる木 T_v^0 の余裕 $f_{T_v^0}(\lambda)$ と不足 $g_{T_v^0}(\lambda)$ は **3.2** の (i) のようにして求まる．明らかに T の全ての点 $v\in V$ に対する $f_{T_v^0}(\lambda)$ と $g_{T_v^0}(\lambda)$ は $O(N)$ 時間で求まる．

木 T_v^i の余裕 $f_{T_v^i}$ と不足 $g_{T_v^i}$ は，**3.2** の (ii) のようにして木 T_v^{i-1} と T_{v_i} の余裕と不足及び辺 $e=(v,v_i)$ の容量 $c_e(\lambda)$ から $O(p(c_e(\lambda))+P)$ 時間で計算できる．T には $n-1$ 本の辺があるので，(ii) の計算は $n-1$ 回実行される．また $\sum_{e\in E} p(c_e(\lambda)) \le N$ である．したがって木 T の余裕 $f_T(\lambda)$ と不足 $g_T(\lambda)$ は $O(N+nP)$ 時間で計算できる．$f_T(\lambda) \ge 0$ なる λ の区間全ては，$f_T(\lambda)$ から $O(P)$ 時間で求まる．このように分割問題は $O(N+nP)$ 時間で解くことができる．

P は N よりも大きいかもしれない．(例えば，図 2 において $f_T(\lambda)$ の折れ点 $\lambda = 2.5, \lambda = 5$ 及び $\lambda = 7$ は，どの供給量，需要量，辺容量の折れ点でもない.）しかし，P は N の多項式以下であることが多い．特に，$T=(V,E)$ が定常ネットワークならば，$N=|V|+|E|=2n-1, P=1$ であり，本文のアルゴリズムの計算時間は $O(n)$ である．もし全ての供給量，需要量，辺容量が階段関数ならば $P\le N$ であり，計算時間は $O(nN)$ である．

3.4 P の上界

供給量，需要量及び辺容量の折れ点は重複しているかもしれない．重複を除いた折れ点の総数を B とし，これらの折れ点を $p_1, p_2, \cdots, p_B$ とする．無論 $B\le N$ である．(例えば，図 2(a) の T に対して $B=5$ であり，図 2(b) において折れ点は黒点で描かれている.）$0=p_1<p_2<\cdots<p_B$ とし，$p_{B+1}=\infty$ であるとする．次の (a)−(c) を仮定する．

(a) v が供給点であり，$p_i < \lambda < p_{i+1}$, $1\le i\le B$ ならば，ある整数 a_{vi}, b_{vi} に対して

$$s_v(\lambda) = a_{vi}\lambda + b_{vi}$$

である．

(b) v が需要点であり，$p_i < \lambda < p_{i+1}$, $1\le i\le B$ な

らば，ある整数 a_{vi}, b_{vi} に対して

$$d_v(\lambda) = a_{vi}\lambda + b_{vi}$$

である．

(c) e が T の辺であり，$p_i < \lambda < p_{i+1}, 1 \le i \le B$ ならば，ある整数 a_{ei}, b_{ei} に対して

$$c_e(\lambda) = a_{ei}\lambda + b_{ei}$$

である．

$1 \le i \le B$ なる各 i に対して W_i を

$$W_i = \sum_{x \in V \cup E} (|a_{xi}| + |b_{xi}|)$$

とし，

$$W = \sum_{i=1}^{B} W_i$$

とする．P が擬多項式で抑えられることを示すためには，P が W の多項式で抑えられることを示せばよい．より詳しくは，次の補題が成立する．

補題 3. $P = O(W^2)$

証明 P は，T のある根付き部分木 T' の余裕 $f_{T'}(\lambda)$ あるいは不足 $g_{T'}(\lambda)$ の折れ点の個数に等しい．ここでは P は $f_{T'}(\lambda)$ の折れ点の個数であるとする．（P が $g_{T'}(\lambda)$ の折れ点の個数である場合に対する証明も同様である．）T' の供給点の個数を n' とする．$p_1, p_2, \cdots, p_B$ のいずれでもない $f_{T'}$ の折れ点を λ とする．このとき $1 \le i \le B$ なるある i に対して $p_i < \lambda < p_{i+1}$ である．そのような折れ点 λ は，有理数であり，次のように供給量，需要量及び辺容量の整数係数で表現されることが分かる．

まず最初に関数 $f_{T'}$ が折れ点 λ で連続的である場合を考える．そのとき，$\mathrm{surp}(\pi_\lambda) = \mathrm{surp}(\pi'_\lambda)$ かつ $V_1 \ne V_1^{'}$ であるような二つの異なる許容分割 $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n'})$ と $\pi_\lambda^{'} = (V'_1, V'_2, \cdots, V'_{n'})$ が存在する．なぜならば，もしそのような分割がないとすると，$f_{T'}$ が λ で連続的でないことになってしまうからである．（図 2(c) で $f_T(\lambda)$ が連続的である折れ点 $\lambda = 2.5$ に対し，T の許容分割 $\pi_\lambda = (\{v_5, v_4, v_2\}, \{v_3, v_1\})$ と $\pi'_\lambda = (\{v_5, v_3, v_1\}, \{v_4, v_2\})$ がある．）u は V_1 内の供給点とし，u' は V'_1 内の供給点とする．$\mathrm{surp}(\pi_\lambda) = \mathrm{surp}(\pi'_\lambda)$ であるから

$$s_u(\lambda) - \sum_{v \in V_1/\{u\}} d_v(\lambda) = s_{u'}(\lambda) - \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} d_v(\lambda)$$

である．$p_i < \lambda < p_{i+1}$ なので

$$a_{ui}\lambda + b_{ui} - \sum_{v \in V_1/\{u\}} (a_{vi}\lambda + b_{vi}) = a_{u'i}\lambda + b_{u'i} - \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} (a_{vi}\lambda + b_{vi})$$

である．したがって

$$\lambda = \frac{-b_{ui} + b_{u'i} + \sum_{v \in V_1/\{u\}} b_{vi} - \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} b_{vi}}{a_{ui} - a_{u'i} - \sum_{v \in V_1/\{u\}} a_{vi} + \sum_{v \in V'_1/\{u'\}} a_{vi}}$$

であり，λ は有理数である．上式右辺の分子と分母は $-W_i$ と W_i の間の整数であるので，$p_i < \lambda < p_{i+1}$ なるそのような連続的な折れ点 λ の個数は $(2W_i + 1)^2$ 以下である．

次に $f_{T'}$ が λ で不連続である場合を考える．そのとき $f_{T'}(\lambda) = \mathrm{surp}(\pi_\lambda)$ であるような許容分割 $\pi_\lambda = (V_1, V_2, \cdots, V_{n'})$ が存在し，$1 \le j \le n'$ なるある j に対して，次の (i) あるいは (ii) が成り立つ．

(i) V_j の供給点を u としたとき

$$\sum_{v \in V_j/\{u\}} d_v(\lambda) = s_u(\lambda)$$

である．

(ii) V_j が誘導する T の部分木のある辺 $e = (v, w)$ を流れるフローの値 $\psi_e(\lambda)$ が容量 $c_e(\lambda)$ に等しい．すなわち

$$\sum_{x \in \mathrm{Des}(w)} d_x(\lambda) = c_e(\lambda)$$

である．

（図 2(c) の不連続な折れ点 $\lambda = 7$ に対する許容分割 $\pi_\lambda = (\{v_5, v_3, v_1\}, \{v_4, v_2\})$ では，$j = 2$ であり，上の (i) 及び (ii) が成り立ち，$e = (v_2, v_4)$ である．）

$p_i < \lambda < p_{i+1}$ なので，(i) のとき

$$\sum_{v \in V_j/\{u\}} (a_{vi}\lambda + b_{vi}) = a_{ui}\lambda + b_{ui}$$

であり，

$$\lambda = \frac{-b_{ui} + \sum_{v \in V_j/\{u\}} b_{vi}}{a_{ui} - \sum_{v \in V_j/\{u\}} a_{vi}}$$

である．(ii) のとき

$$\sum_{x\in \mathrm{Des}(w)} (a_{xi}\lambda + b_{xi}) = a_{ei}\lambda + b_{ei}$$

であり，

$$\lambda = \frac{-b_{ei} + \sum_{x\in \mathrm{Des}(w)} b_{xi}}{a_{ei} - \sum_{x\in \mathrm{Des}(w)} a_{xi}}$$

である．したがって，$p_i < \lambda < p_{i+1}$ である不連続な折れ点 λ の個数は $2(2W_i + 1)^2$ 以下である．(辺容量がない場合には，不連続な折れ点の個数は $(2W_i + 1)^2$ 以下である [4].)

このようにして次式を証明することができた．

$$P \le B + \sum_{i=1}^{B} 3(2W_i + 1)^2 = O(W^2)$$

□

上の補題から次の定理を得る．

定理 2. 全ての供給量，需要量及び辺容量が整数係数をもつ区分的線形関数であるならば，パラメトリック木ネットワークに対する分割問題は $O(nW^2)$ 時間で解くことができる．ここで W は供給量，需要量，辺容量の全ての係数の絶対値の合計である．

このようにして W が N の多項式であるとき本文のアルゴリズムは多項式時間で走る．

4. む す び

本文では，まず辺容量付き定常木ネットワーク T に対する最大供給率問題が $O(nL)$ 時間で解けることを示した．ここで n は T の点数で，L は T の対数サイズである．その問題を n の多項式時間で解く強多項式時間アルゴリズムを求めることは今後の課題である．

次に辺容量付きパラメトリック木ネットワーク T に対する分割問題を解くアルゴリズムを与えた．全ての供給量，需要量及び辺容量が整数係数をもつ区分的線形関数であるとき，そのアルゴリズムは擬多項式時間で走る．そのアルゴリズムを少し修正すれば，$f_T(\lambda) \ge 0$ なる λ に対する許容分割を具体的に見つけることもできる．便宜上，供給量，需要量及び辺容量は一つの変数 λ の関数であるとしたが，二つ以上の変数の関数である場合にも，本文のアルゴリズムを拡張することにより擬似多項式時間で分割問題を解くことができる．

木ネットワーク T が許容分割をもたないときには，できるだけ多くの需要点にフローを送り，その需要量の合計を最大にしたい．このような最大化問題に関しては，T が定常木ネットワークならば FPTAS が存在することが知られている [8], [9]．パラメトリック木ネットワーク T の最大化問題に対して FPTAS を求めることが今後の課題である．

謝辞 本研究は文部科学省私立大学戦略的研究基盤形成支援事業（平成 22 年〜平成 26 年）から一部援助を受けた．

文　　献

[1] N.G. Boulaxis and M.P. Papadopoulos, “Optimal feeder routing in distribution system planning using dynamic programming technique and GIS facilities,” IEEE Trans. Power Deliv., vol.17, no.1, pp.242–247, 2002.

[2] G. Gallo, M.D. Grigoriadis, and R.E. Tarjan, “A fast parametric maximum flow algorithm and applications,” SIAM J. Comput., vol.18, no.1, pp.30–55, 1989.

[3] E. Minieka, “Parametric network flows, operation research,” vol.20, no.6, pp.1162–1170, 1972.

[4] S. Morishita and T. Nishizeki, “Parametric power supply networks,” J. Comb. Optim., DOI 10.1007/s10878-013-9661-5, 2013.

[5] A.B. Morton and I.M.Y. Mareels, “An efficient brute-force solution to the network reconfiguration problem,” IEEE Trans. Power Deliv., vol.15, pp.996–1000, 2000.

[6] J.-H. Teng and C.-N. Lu, “Feeder-switch relocation for customer interruption cost minimization,” IEEE Trans. Power Deliv., vol.17, pp.254–259, 2002.

[7] T. Ito, X. Zhou, and T. Nishizeki, “Partitioning graphs of supply and demand,” Discrete Applied Math., vol.157, pp.2620–2633, 2009.

[8] T. Ito, X. Zhou, and T. Nishizeki, “Partitioning trees of supply and demand,” Int. J. Found. of Computer Science, vol.16, no.4, pp.803–827, 2005.

[9] M. Kawabata and T. Nishizeki, “Partitioning trees with supply, demand and edge-capacity,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E96-A, no.6, pp.1036–1043, June 2013.

（平成 26 年 3 月 2 日受付，10 月 6 日再受付）

丸田　真平

平 26 関西学院大・理工・情報卒．グラフアルゴリズムに興味をもつ．

西関　隆夫　（正員：フェロー）

昭 44 東北大・工・通信卒．昭 49 同大学院博士課程了．工博．同大学助手．助教授，教授を経て，現在同大学名誉教授．平 22 関西学院大学教授．アルゴリズム，暗号理論，計算幾何学，グラフ描画，グラフ理論の研究と教育に従事．IEEE Life Fellow, ACM Fellow, 情報処理学会フェロー，日本応用数理学会会員．