

## 量子アニーリング——計算アルゴリズムの観点から——

田中 宗<sup>†,††a)</sup>

## Quantum Annealing from a Viewpoint of Algorithm

Shu TANAKA<sup>†,††a)</sup>

あらまし 膨大な選択枝から最適な選択枝を探索する組合せ最適化問題に対し、現在、量子アニーリングと呼ばれる計算技術が注目を集めている。近年、量子アニーリングを実行することが可能な専用機が開発され、専用機を用いて組合せ最適化問題を解く取り組みも始まっている。量子アニーリング専用機を用いて組合せ最適化問題を解く際には、解きたい組合せ最適化問題をイジングモデルと呼ばれる統計力学モデルに変換し、それを入力することで計算を行う。また量子アニーリング専用機を用いず、古典計算機を用いた実装方法も存在する。本論文では、量子アニーリングの計算技術としての側面について焦点を絞り、解説する。

キーワード 量子アニーリング, 組合せ最適化問題, イジングモデル, 自然計算

## 1. まえがき

膨大な選択枝から最適な選択枝を探索する、いわゆる組合せ最適化問題は、様々な場面で現れる問題である。より正確に組合せ最適化問題を表現すると、離散変数を引数とする実関数が最小値を取る条件を求める問題である。組合せ最適化問題は問題の規模が増加するにつれ、その解の候補が指数関数的に増大することが知られている。そのため一つずつ解の候補を列挙し、その中で最適解を見つけることは困難である。これを組合せ爆発と呼ぶ。組合せ最適化問題は困難な問題であるが、様々な場面で現れるため、これを高速かつ高精度に解く計算技術の開発は重要な課題であり、これまでも多くの研究がなされてきた。

本論文で取り上げる量子アニーリングと呼ばれる方法は、自然現象を用いた計算技術、いわゆる自然計算(ナチュラルコンピューティング)の一つであると捉えることができる。量子アニーリングは、組合せ最適化問題をイジングモデルと呼ばれる物理系にマッピングし、量子力学の原理を使って問題を解く方法である。

量子アニーリングは近年、計算技術として活用できる量子力学の探求、すなわち、物理学の学術研究という位置付けのみならず、産業界における研究開発という観点からも高い関心を集めている計算技術である。量子アニーリングは1998年、門脇と西森によって理論的に提案された方法である[1]~[4]。これは温度による熱ゆらぎ効果を模倣し状態遷移を促すことで、組合せ最適化問題を解く手法であるシミュレーテッドアニーリング[5]の量子力学版であるとみなすことができる。つまり量子アニーリングは、量子ゆらぎ効果を模倣し状態遷移を促すことで、組合せ最適化問題を解く計算技術である。量子アニーリング提案当初は、量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式を直接解くことにより、量子アニーリングの性能評価を行う研究[1],[2]や、量子アニーリングの収束保証定理の証明[6]、また古典計算機による数値計算実験という観点から、シミュレーテッドアニーリングと量子アニーリングの比較検討がなされてきた[7]~[12]。

その後、量子アニーリングの研究の状況は2011年に一変した。量子アニーリングを実際に物理現象として実装する専用機がD-Wave Systemsによって開発された[13]。この当時、量子アニーリング専用機の中には128量子ビットが搭載されていたが、2013年、2015年、2017年とそれぞれ新しい専用機を発表し、それぞれ512量子ビット、1152量子ビット、2048量子ビットと量子ビット数は倍々に増加している。また、この量子

<sup>†</sup> 早稲田大学高等研究所, 東京都

Waseda Institute for Advanced Study, Waseda University, Nishiwaseda, Shinjuku-ku, Tokyo, 169-8050 Japan

<sup>††</sup> 国立研究開発法人科学技術振興機構 さきがけ, 川口市

JST, PRESTO, 4-1-8 Honcho, Kawaguchi-shi, 332-0012 Japan

a) E-mail: shu.tanaka@aoni.waseda.jp

アニーリング専用機を利用する研究機関も徐々に増え、現在では量子アニーリングを用いて様々な組合せ最適化問題を解くという研究や、機械学習処理の一部を量子アニーリングを用いて実行する研究が進められている。

本論文では、上記のように現在活発に研究開発が進められている量子アニーリングについて、計算技術としての側面を紹介する。

## 2. 量子アニーリングの概略

前章で述べたように、量子アニーリングは組合せ最適化問題を高速かつ高精度に解くと期待されている計算技術である。以降では、組合せ最適化問題を量子アニーリングを用いて解く際の流れを説明する。

まず第一段階として、解くべき組合せ最適化問題を用意する。本論文では典型的な組合せ最適化問題を例示するに留めるが、実際に量子アニーリングを活用する場合、我々が行いたい一連の情報処理の中のどの部分に組合せ最適化問題が内在するかを明確化することが重要である。第二段階として、第一段階で用意した組合せ最適化問題をイジングモデル（二値変数の二次形式；Quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)）で定式化する。イジングモデルは統計力学における典型的なモデルの一つであり、**3.**で定義する。第三段階として、第二段階で定式化したイジングモデルに対し、量子ゆらぎを導入し、これを徐々に弱める。量子ゆらぎの導入方法については、**4.**で説明する。ゆらぎを導入し、それを徐々に弱めるという操作を一般にアニーリングと呼ぶ。これが量子アニーリングの命名の所以である。量子アニーリングは自然現象を用いた計算技術ということが出来るため、量子アニーリングは自然計算（ナチュラルコンピューティング）の一種であるとみなすことができる。

量子アニーリングを実装する方法として、古典計算機によるシミュレーション実装と量子アニーリング専用マシンによる実験的実装の二つが挙げられる。前者は様々な方法が開発されているが、代表的な方法として、時間依存するシュレディンガー方程式を直接解く方法と、量子モンテカルロ法と呼ばれる方法の二つが挙げられる。これらの方法について **5.**で紹介する。

## 3. 組合せ最適化問題とイジングモデル

組合せ最適化問題は、離散変数  $\mathbf{x}$  を引数とする実数関数  $f(\mathbf{x})$  を最小にする条件を求める問題である。すなわち、

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (1)$$

なる  $\mathbf{x}^*$  を求めることに相当する。ここで  $f(\mathbf{x})$  をコスト関数と呼ぶ。典型的な組合せ最適化問題の例として、数分割問題や巡回セールスマン問題などが挙げられる。数分割問題は、 $\mathcal{N}$  個の数値からなる集合のうち、和が  $\mathcal{M}$  になるような部分集合を探索する問題であり、巡回セールスマン問題は  $\mathcal{N}$  箇所を一度ずつ辿る最小経路を探索する問題である。組合せ最適化問題は問題のサイズ  $\mathcal{N}$  に対し、解の候補数が指数関数的に増加する。これを組合せ爆発と呼び、組合せ最適化問題に内在する困難の要因である。

**1.**で述べたように、量子アニーリングは物理現象を用いて組合せ最適化問題を解く計算技術である。そのため、量子アニーリングを用いて組合せ最適化問題を解くためには、組合せ最適化問題を量子アニーリングに適した物理系へとマッピングする必要がある。そこで組合せ最適化問題を、統計力学の典型的なモデルの一つであるイジングモデルで表現することを考える。イジングモデルは、グラフ  $G = (V, E)$  上で定義される。±1 の二つの値を取る、スピンと呼ばれる変数  $s_i$  を用いて、イジングモデルは以下の式で表現される。

$$\mathcal{H} = - \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} s_i s_j - \sum_{i \in V} h_i s_i, \quad (2)$$

$$s_i = \pm 1 \quad (1 \leq i \leq N). \quad (3)$$

ここで左辺の  $\mathcal{H}$  をハミルトニアンと呼ぶ。ハミルトニアンはスピンの状態に対応するエネルギーを表す。また右辺中の  $J_{ij}$ ,  $h_i$  はそれぞれ相互作用、磁場と呼ばれるものであり、実数値を取る。以下で数分割問題や巡回セールスマン問題を例に示すように、組合せ最適化問題におけるコスト関数と、イジングモデルのハミルトニアンを対応付けることができる。典型的な組合せ最適化問題と対応するイジングモデルの表現については、[14] に詳しく掲載されている。

### 3.1 数分割問題を表現するイジングモデル

数分割問題は以下のように定義される。数値の集合  $\{n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{N}}\}$  が与えられたとする。このとき、和が  $\mathcal{M}$  となるような部分集合は存在するか。この問題をイジングモデルを使って解くために、以下のような式を導入する。

$$\mathcal{H} = \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} n_i \epsilon_i - \mathcal{M} \right)^2, \quad (4)$$

$$(\epsilon_i = 0, 1) \quad (1 \leq i \leq \mathcal{N}). \quad (5)$$

このハミルトニアン  $\mathcal{H}$  の最小値が 0 となる時、上記のような部分集合が存在し、そのときの  $\{\epsilon_i\}$  で、 $\epsilon_j = 1$  ( $1 \leq j \leq \mathcal{N}$ ) なる  $j$  について並べたものが上記の部分集合となる。先ほど導入したスピン変数を用いて上の式を書き直すと、イジングモデルとなる。具体的には、

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}(1 + s_i) \quad (6)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq \mathcal{N}} n_i n_j s_i s_j \\ & + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j - \mathcal{M} \right) n_i s_i \\ & + \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j - \mathcal{M} \right)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$(s_i = \pm 1) \quad (1 \leq i \leq \mathcal{N}). \quad (8)$$

となる。このハミルトニアン  $\mathcal{H}$  の最小値が 0 となる時、上記のような部分集合が存在し、そのときの  $\{s_i\}$  で、 $s_j = 1$  ( $1 \leq j \leq \mathcal{N}$ ) なる  $j$  について並べたものが上記の部分集合となる。

### 3.2 巡回セールスマン問題を表現するイジングモデル

巡回セールスマン問題は以下のように定義される。 $\mathcal{N}$  都市を漏れなく一度ずつ訪問し、最後に出発地点に戻る場合を考える。このとき経路が最短になる経路を求める。都市  $i$  と都市  $j$  の距離を  $l_{ij}$  とする。また、 $c_\alpha$  を  $\alpha$  番目に訪ねる都市とする。このとき経路長は、

$$L = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} l_{c_\alpha, c_{\alpha+1}} \quad (9)$$

で与えられる。ただし、最後に出発地点に戻るという条件から、

$$c_{\mathcal{N}+1} = c_1 \quad (10)$$

である。このとき最小の  $L$  となる  $\{c_\alpha\}$  ( $1 \leq \alpha \leq \mathcal{N}$ ) が答えとなる。この問題をイジングモデルを使って解くために、まず  $\{n_{i,\alpha}\}$  ( $1 \leq i, \alpha, \mathcal{N}$ ) という変数を導入する。 $\alpha$  番目に都市  $i$  を訪ねるとき  $n_{i,\alpha} = 1$  であり、それ以外の場合には 0 となる変数である。 $\{n_{i,\alpha}\}$  を用いて、上記  $L$  を以下のように書き換える。

$$L = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \sum_{1 \leq i, j \leq \mathcal{N}} l_{i,j} n_{i,\alpha} n_{j,\alpha+1}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left( 1 - \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} n_{i,\alpha} \right)^2 \\ & + \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} n_{i,\alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

ただしここで式 (10) より、任意の  $i$  について、 $n_{i,\mathcal{N}+1} = n_{i,1}$  である。あとは **3.1** と同様、スピン変数  $s_{i,\alpha} = 2n_{i,\alpha} - 1$  を用いて書き換えればイジングモデルのハミルトニアンになる。

## 4. 量子ゆらぎの導入

前章ではイジングモデルを用いて組合せ最適化問題を表現する方法を紹介した。本章では、量子ゆらぎの導入方法について紹介する。パウリ演算子は以下で定義される。

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\sigma_i^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

また、 $2 \times 2$  の単位行列を  $I$  とする。前章で導入したイジングモデルのハミルトニアン (式 (2)) を、以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & - \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} \left( \bigotimes_{k=1}^{i-1} I \right) \otimes \sigma_i^z \otimes \left( \bigotimes_{l=i+1}^{j-1} I \right) \\ & \otimes \sigma_j^z \otimes \left( \bigotimes_{m=j+1}^{\mathcal{N}} I \right) \\ & - \sum_{i \in V} h_i \left( \bigotimes_{k=1}^{i-1} I \right) \otimes \sigma_i^z \otimes \left( \bigotimes_{l=i+1}^{\mathcal{N}} I \right). \end{aligned} \quad (15)$$

これを単に、

$$\mathcal{H}_c = - \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z.$$

と書く場合も多い。これは  $2^{\mathcal{N}} \times 2^{\mathcal{N}}$  の対角行列である。また、 $\sigma^z$  の固有ベクトルを

$$|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

という記号を用いて表現する。

次に量子ゆらぎを導入する。量子ゆらぎの導入方法は任意性があるが、よく使われる形式である横磁場について紹介する。 $\sigma^x$ の固有ベクトルは、

$$|\rightarrow\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$|\leftarrow\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

である。このような状態を量子重ね合わせ状態と呼ぶ。横磁場は

$$\mathcal{H}_q = -\Gamma \sum_{i=1}^N \left( \bigotimes_{k=1}^{i-1} I \right) \otimes \sigma_i^x \otimes \left( \bigotimes_{l=i+1}^N I \right) \quad (19)$$

で与えられる。ここで $\Gamma$ は横磁場の強さであり、量子揺らぎの大きさを表す。 $\mathcal{H}_c$ と同様、

$$\mathcal{H}_q = -\Gamma \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \quad (20)$$

と表すこともよくある。 $\mathcal{H}_q$ の最小固有値に対応する固有ベクトルは $\Gamma > 0$ のとき、

$$|\rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow\rangle = |\rightarrow\rangle \otimes |\rightarrow\rangle \otimes \dots \otimes |\rightarrow\rangle \quad (21)$$

である。これは $|\uparrow \uparrow \dots \uparrow\rangle$ から $|\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle$ の $2^N$ 通りの状態が同じ重みの重ね合わせ状態で存在していることを意味する。

## 5. 量子アニーリングの実装方法

続いて量子アニーリングの実装方法について紹介する。量子アニーリングの目的は組合せ最適化問題の最適解を得ること、すなわち、先ほど導入した物理の言葉で言えば、 $\mathcal{H}_c$ の最小固有値に対応する固有ベクトルを求めることである。量子アニーリングは以下のような時間依存するハミルトニアンで実行できる。

$$\mathcal{H}(t) = A(t)\mathcal{H}_c + B(t)\mathcal{H}_q \quad (22)$$

ただしここで $A(t)$ は単調増加関数、 $B(t)$ は単調減少関数である。理想的には $A(t)$ は0から1への単調増加関数であり、 $B(t)$ は1から0への単調減少関数である。

### 5.1 シュレディンガー方程式

量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式に基づく量子アニーリングについて簡単に述べる。

詳細な式の導出や具体例については[1], [4]に記されている。この方法を用いる動機は、量子力学に基づいた時間発展を経る様子をたどることである。古典計算機上のメモリにハミルトニアンを格納できている時点で組合せ最適化問題の最適解は既に知っていることになるため、実用的な組合せ最適化問題を解く際にはこの方法を用いることはないが、量子アニーリング専用機でどのようなことが起こっているかを調査するための最も単純化された計算方法である。実際には温度効果や外界の効果等を考慮した方程式を解く必要があるが、それは本論文の目的から外れるため省略する。

時間に依存するシュレディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (23)$$

$$|\psi(0)\rangle = |\rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow\rangle \quad (24)$$

である。ここで $\hbar$ はプランク定数である。スピンの個数を $N$ とすると、 $|\psi(t)\rangle$ は $2^N$ 次元ベクトル、 $\mathcal{H}(t)$ は $2^N \times 2^N$ 行列である。初期状態 $|\psi(0)\rangle$ は、 $\mathcal{H}(0)$ の最小固有値に対応する固有ベクトルである。この式は $2^N$ 本の連立微分方程式であるため、Runge-Kutta法等を用いて数値的に解くことが可能である。時刻 $t$ の関数として固有値が交差しない限りにおいては、十分ゆっくりアニーリングを行った場合には、断熱定理より確実に基底状態に到達することが知られている。

### 5.2 量子モンテカルロ法

古典計算機で大規模な組合せ最適化問題を量子アニーリングを用いて解く方法として、量子モンテカルロ法が挙げられる。

$$\mathcal{H}(t) = A(t)\mathcal{H}_c + B(t)\mathcal{H}_q, \quad (25)$$

$$\mathcal{H}_c = - \sum_{(i,j) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z, \quad (26)$$

$$\mathcal{H}_q = - \sum_{i=1}^N \sigma_i^x \quad (27)$$

はそのまま通常のモンテカルロ法を適用することはできない。そのため、鈴木・トロツタ分解[15], [16]と呼ばれる方法を用いてこのシステムを別の（モンテカルロ法が実行できる）システムに変換する。変換後の式は

$$\mathcal{H}_P(t) = \frac{A(t)}{P} \left( - \sum_{(i,j) \in E} \sum_{p=1}^P J_{ij} s_{i,p} s_{j,p} - \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^P h_i s_{i,p} \right) - \frac{T}{2} \ln \coth \left( \frac{B(t)}{TP} \right) \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^P s_{i,p} s_{i,p+1}, \quad (28)$$

$$s_{i,p} = \pm 1 \quad (29)$$

で与えられる。ただしここで  $P$  はトロッタ数と呼ばれる。  $P$  が無限大の極限でこの変換は完全に厳密なものとなる。これはもともと与えられたグラフ  $G = (V, E)$  を  $P$  個並べ、そのグラフ間の同一頂点間のみ相互作用をもたせた構造となっている。この相互作用は式 (28) の第二項で表現されている。ただしここで任意の  $i$  について  $s_{i,p+1} = s_{i,1}$  である。ここで  $\mathcal{H}_c$  だけで表現できる系をモンテカルロ法を使って計算することは容易である。これは  $\mathcal{H}_c$  が対角行列で表現されることに起因する。したがって、式 (28) で与えられる変換を施すことにより、非対角要素を含む行列で表現されていた量子系のハミルトニアンを、対角行列で表現される古典系のハミルトニアンで表すことにより、通常のモンテカルロ法と同様の手続きを行うことができる。なお変換の詳細については、[4] を参照されたい。

量子モンテカルロ法を含む古典計算機で実行可能な各種アルゴリズムによる計算時間と量子アニーリング専用機の計算時間の比較については現段階では決定的な議論はない。例えば、既存の量子アニーリング専用機の性能を発揮しやすい weak-strong cluster 問題と呼ばれる特殊な組合せ最適化問題について、Denchev らによる研究 [17] がなされた。この論文では、モンテカルロ法によるシミュレーテッドアニーリングや本節で紹介した量子モンテカルロ法による量子アニーリングに比べ、量子アニーリング専用機の計算時間が短いと主張されているが、その後、Mandra らが同一の問題についてより丁寧な解析を行った [18]。更に現在も量子アニーリング専用機の性能を正確に評価する方法について、理論物理学や計算物理学の観点から徹底的に調べられている状況である。

### 5.3 量子アニーリング専用機を用いる方法

量子アニーリング専用機を用いる場合には、以下の手続きが必要になる。

(1) 組合せ最適化問題を表現するイジングモデルを生成する。このイジングモデルはグラフ  $G = (V, E)$

上に定義される。

(2) 量子アニーリング専用機の相互作用トポロジー  $G' = (V', E')$  に従い、上記で生成したイジングモデルを埋め込む。埋め込みの際に必要なことは、元のイジングモデルの物理的性質を変えずに、 $G \rightarrow G'$  の変換に伴うイジングモデルを定義する必要がある。

(3) 上記で定義したイジングモデルの係数  $J_{ij}$ ,  $h_i$  を入力する

特に第二のグラフ埋め込みについては、ビット数を節約する方法、解精度が下がらない方法等、様々な観点から検討がなされている。また既存の量子アニーリング専用機に埋め込めないような規模の問題を取り扱う場合には、領域を適切に分割する必要がある。D-Wave System によって qbsolv というパッケージが公開されている [19]。現段階は量子アニーリング専用機のパフォーマンスを最大限発揮するための工夫についての研究が多くなされている状況である。

## 6. む す び

本論文では、量子アニーリングの計算技術的側面について概観した。量子アニーリングに対する産業界からの期待が強く寄せられている一方、現段階は以下の三点について開発を進めていく必要があると筆者は感じる。

- 量子アニーリング専用機の高性能化

現状の量子アニーリング専用機では量子ビットのコヒーレンス時間が短いことが指摘されている。また現状の専用機は 2048 量子ビットを搭載しているが、より多くの量子ビットが搭載されれば解ける問題の規模が大きくなる。

- 実用的な組合せ最適化問題を探索

量子アニーリング専用機を用いて実社会に内在する組合せ最適化問題を解く試みが始まっているが、現在それほど多くない。そのため、組合せ最適化問題で表現できる課題を有する業種の研究者が参入することにより、当該分野の発展につながる。

- ユーザインタフェースの洗練化

現状ではごく少数の専門家が使えるユーザインタフェースとなっているが、量子アニーリング専用機を用いることによって情報処理を加速させるためには、多くのユーザにとって使いやすいインタフェースを作成する必要がある。

ここでは紙数の関係から取り上げられなかった各種の基礎的課題については、量子アニーリングや関連領

域に関する教科書 [4] やレビュー論文 [20] を参照されたい。

## 文 献

- [1] T. Kadowaki and H. Nishimori, “Quantum annealing in the transverse Ising model,” *Phys. Rev. E*, vol.58, pp.5355–5363, 1998.
- [2] T. Kadowaki, “Study of optimization problems by quantum annealing,” arXiv:quant-ph/0205020, 2002.
- [3] 西森秀稔, 大関真之, 量子コンピュータが人工知能を加速する, 日経 BP, 2016.
- [4] S. Tanaka, R. Tamura, and B.K. Chakrabarti, *Quantum Spin Glasses, Annealing and Computation*, Cambridge University Press, 2017.
- [5] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr., and M.P. Vecchi, “Optimization by simulated annealing”, *Science*, vol.220, no.4598, pp.671–680, 1983.
- [6] S. Morita and H. Nishimori, “Convergence theorems for quantum annealing,” *Journal of Physics A*, vol.39, pp.13903–13920, 2006.
- [7] R. Matroňák, G.E. Santoro, and E. Tosatti, “Quantum annealing by the path-integral Monte Carlo method: The two-dimensional random Ising model,” *Phys. Rev. B*, vol.66, 094203, 2002.
- [8] R. Matroňák, G.E. Santoro, and E. Tosatti, “Quantum annealing of the traveling-salesman problem,” *Phys. Rev. E*, vol.70, 057701, 2004.
- [9] D.A. Battaglia, G.E. Santoro, and E. Tosatti, “Optimization by quantum annealing: Lessons from hard satisfiability problems,” *Phys. Rev. E*, vol.71, 066707, 2005.
- [10] K. Kurihara, S. Tanaka, and S. Miyashita, “Quantum annealing for clustering,” *Proc. 25th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI2009)*, 2009.
- [11] I. Sato, K. Kurihara, S. Tanaka, H. Nakagawa, and S. Miyashita, “Quantum annealing for variational Bayes inference,” *Proc. 25th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI2009)*, 2009.
- [12] I. Sato, S. Tanaka, K. Kurihara, S. Miyashita, and H. Nakagawa, “Quantum annealing for Dirichlet process mixture models with applications to network clustering,” *Neurocomputing*, vol.121, pp.523–531, 2013.
- [13] <https://www.dwavesys.com>
- [14] A. Lucas, “Ising formulations of many NP problems,” *Frontiers in Physics*, vol.2, 5, 2014.
- [15] M. Suzuki, “Relationship between  $d$ -dimensional quantal spin systems and  $(d+1)$ -dimensional Ising systems,” *Progress of Theoretical Physics*, vol.56, pp.1454–1469, 1976.
- [16] H.F. Trotter, “On the product of semi-groups of operators,” *Proc. American Mathematical Society*, vol.10, pp.545–551, 1959.
- [17] V.S. Denchev, S. Boixo, S.V. Isakov, N. Ding, R. Babbush, V. Smelyanskiy, J. Martinis, and H. Neven, “What is the computational value of finite-range tunneling?,” *Phys. Rev. X*, vol.6, 031015, 2016.
- [18] S. Mandrá, Z. Zhu, W. Wang, A. Perdomo-Ortiz, and H.G. Katzgraber, “Strengths and weaknesses of weak-strong cluster problems: A detailed overview of state-of-the-art classical heuristics versus quantum approaches,” *Phys. Rev. A*, vol.94, 022337, 2016.
- [19] <https://github.com/dwavesystems/qbsolv>
- [20] A. Das and B.K. Chakrabarti, “Colloquium: Quantum annealing and analog quantum computation,” *Review of Modern Physics*, vol.80, pp.1061–1081, 2008.

(平成 29 年 6 月 30 日受付, 10 月 14 日再受付,  
30 年 2 月 13 日公開)



田中 宗

博士 (理学). 近畿大学量子コンピュータ研究センター博士研究員, 東京大学大学院理学系研究科にて日本学術振興会特別研究員 (PD), 京都大学基礎物理学研究所基研特任助教, 早稲田大学高等研究所助教を経て, 2017 年より現職. また, 2016 年 10 月より JST さきがけ研究者を兼任. 専門分野は物理学, 特に, 量子アニーリング, 統計力学, 物性物理学. NEDO IoT プロジェクト「IoT 推進のための横断技術開発プロジェクト」委託事業における「組合せ最適化処理に向けた革新的アニーリングマシンの研究開発」に従事している. 量子アニーリングの研究開発を加速させるため, 多種多様な業種の方々との情報交換を積極的に行っている.