

共振器間結合の現象論と本質論

粟井 郁雄^{†a)} 張 陽軍^{††}

Phenomenological and Essentialistic Theories of Coupling between Resonators

Ikko AWAI^{†a)} and Yangjun ZHANG^{††}

あらまし マクスウェル方程式を基に結合モード理論を用いて、共振器間の結合係数を多様な表現で算出している。まず周波数を用いた既知の表現が実は時間（周期）を用いて書き直せること、いいかえればフーリエ変換の関係にある周波数軸上と時間軸上で記述できることを説明している。更に共振器を形成する材料によって夫々に特化した表現が可能であること、すなわち金属共振器では金属の表面を流れる導電電流の励振効率、誘導体共振器ではその内部を流れる分極電流の励振効率で結合効率が与えられることを明らかにしている。これらは結合に寄与する実体とその運動を明示している点で最も本質的な表現であると言えるが、それらの電流によって生じた空間中の電磁界の重なり積分によって、より間接的な表現も可能であることを示している。これらの様々な表現はそれぞれ現象論的、実体論的、本質論的なものと位置づけられ、共振器間結合のいろいろな側面から見た描像が明らかとなった。

キーワード 共振器, 結合係数, 結合モード理論, マクスウェル方程式, 現象論, 実体論, 本質論, 定義

1. ま え が き

共振器の回りには電磁界が分布しているために他の共振器と結合してエネルギーが双方でやり取りされる。その度合いを結合係数と呼ぶが、何故かその定義はあまり明確ではない。しかしこの量はマイクロ波帯を始めとする通信システムにおいて望ましい信号を抜き出したり不要信号を除去したりするフィルタの設計において死活的に重要であるうえ、最近注目を浴びているワイヤレス給電 (WPT) 技術においても結合共振器型システムの中核をなす共振器素子の振る舞いを決定する量として位置づけられる。

筆者等はマクスウェル方程式から出発して結合モード理論を用いて結合係数を導出し、その定義はどうあるべきか、その意味は何か、どのように計算または測定すべきか、などと言った問題に解答を与える努力を重ねてきたが、最近未解明の部分の解答を見出し、

認識論的な意味でも全体的な整理ができたので御報告する。結合モード理論を用いて、我々は既に「結合共振器の周波数分離」によって結合係数を与える周知の方法が、実は「共振器間のエネルギー交換の周期」にその基礎をもつ事を明らかにした[1]。この関係は結合係数を「周波数または時間」というフーリエ変換によって結ばれた双対的な量に基づいて表現しているという意味でも理解性の高いものである。そしてエネルギー交換による表現は実体論（実像）的、周波数による表現は現象論（虚像）的な表現といえる。なおこの考え方・用語法は武谷三男によって与えられたものである[2]。

しかし結合モード理論によって我々が得たもう一組の表現である「金属共振器間結合係数は電磁界重なり積分で」、「誘導体共振器間結合係数は分極電流エネルギーで」計算されるという結論[3]は表現の対称性が悪く、なぜ共振器の材質が異なると全く異なった範疇に属する概念によって結合係数が表現されるのかという疑問は続いてきた。

更に加えるならば、上述の「金属共振器が作る電磁界の重なり積分は磁界成分と電界成分に分離されその差によって結合係数が表現できる」という事実は極めて有用であり、フィルタ設計、WPT システム設計に

[†] 株式会社リユテック, 大津市

Ryutech Co., 1-5 Yokotani, Seta-oecho, Otsu-shi, 520-2194 Japan

^{††} 龍谷大学理工学部電子情報学科, 大津市

Dept. of Electronics & Informatics, Ryukoku University, 1-5 Yokotani, Seta-oecho, Otsu-shi, 520-2194 Japan

a) E-mail: awai@ryutech.com

において我々はしばしば用いている [4]~[6]. ところが、結合という現象は物質に特有の現象であり、物質が存在しない結合はあり得ない. しかるに重なり積分という量の計算に登場するものは空間に存在する 2 種の電磁界であり積分領域内に物質は存在しない、つまり電磁界という実体は存在するが重なり積分という量には物質は関与しないという事になる. それでは金属共振器の結合を決める物質は何かという問題につき当たる. そのヒントは「誘導体共振器の結合係数は分極電流エネルギーで表現される」という上記の命題中にあった. この命題には明らかに物質が関与している. そして分極電流という実体も明示されている, そこで金属共振器間結合を支配する電流は何かと言えば, それは導電電流であろう. そして理想的な金属は完全導体であるから対象となる電流は表面電流である. このような想定で結合の「本質」探しを行った.

上に「現象論」「実体論」という言葉が出てきたが, その良し悪しを論じているわけではない, 鏡に映る顔は虚像であるがそれは対象を充分反映している. 結合係数で言えば周波数表現は虚像であるが, 計算・測定両面において非常に便利な表現であり, 使い勝手の上では「実像」に勝っている. ただ共振器間の結合を実体的に支配するものは何か, 定義はなにかという問いに答えるために「虚像」の裏に潜む「実像」を探し出し, 結合係数の物理像を明確にしたいというのが今回の主旨の一つである. 本論文では, 従来我々が見出した結合係数表現の足りない部分を補って得た表現を新たに加え, 合計四つの表現の相互関係を論じる. そして最終的に結合係数という物理量の本質に迫りその定義を見つめたいと考えている.

2. 結合モード方程式の導出

結合した系の電磁界を結合前の各電磁界の一次結合で表すのが理論の出発点である.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \sum_i a_i \mathbf{E}_i \\ \mathbf{H} &= \sum_i b_i \mathbf{H}_i\end{aligned}\quad (1)$$

これらのそれぞれが次のマクスウェル方程式を満たしている

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_i &= j\omega_i \varepsilon_i \mathbf{E}_i, \\ \nabla \times \mathbf{E}_i &= -j\omega_i \mu_i \mathbf{H}_i.\end{aligned}\quad (2)$$

ここに ε_i , μ_i は非結合各系の誘電率/透磁率である.

結合系で成り立つマクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.\quad (3)$$

に式 (1) を代入して境界条件, 初期条件の下で係数 a_i , b_i を決める必要がある. 途中のプロセスは参考文献 [7] に回し結果だけを示すと, 電界振幅の変化に関する方程式として以下の関係が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 a_1}{dt^2} - (p_{11} q_{11} + p_{12} q_{21}) a_1 - (p_{11} q_{12} + p_{12} q_{22}) a_2 &= 0 \\ \frac{d^2 a_2}{dt^2} - (p_{21} q_{11} + p_{22} q_{21}) a_1 - (p_{21} q_{12} + p_{22} q_{22}) a_2 &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

この形式の連立方程式は結合モード方程式と呼ばれ, 非結合系の二つのモードが結合によって時間的に振幅を変化させる事を示している. ここに

$$\begin{aligned}p_{11} &= \frac{1}{|g|} \left\{ j\omega_1 (c_{11} g_{22} - c_{21} g_{12}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j (c_{2j} g_{12} - c_{1j} g_{22}) c_j f_{j1} \right\} \\ p_{12} &= \frac{1}{|g|} \left\{ j\omega_2 (c_{12} g_{22} - c_{22} g_{12}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j (c_{2j} g_{12} - c_{1j} g_{22}) c_j f_{j2} \right\} \\ p_{21} &= \frac{1}{|g|} \left\{ j\omega_1 (c_{21} g_{11} - c_{11} g_{21}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j (c_{1j} g_{21} - c_{2j} g_{11}) c_j f_{j1} \right\} \\ p_{22} &= \frac{1}{|g|} \left\{ j\omega_2 (c_{22} g_{11} - c_{12} g_{21}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j (c_{1j} g_{21} - c_{2j} g_{11}) c_j f_{j2} \right\}\end{aligned}\quad (5)$$

$$|g| = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21},\quad (6)$$

$$\begin{aligned}q_{11} &= \frac{1}{|h|} \{ j\omega_1 (d_{11} h_{22} - d_{21} h_{12}) \} \\ q_{12} &= \frac{1}{|h|} \{ j\omega_2 (d_{12} h_{22} - d_{22} h_{12}) \} \\ q_{21} &= \frac{1}{|h|} \{ j\omega_1 (d_{21} h_{11} - d_{11} h_{21}) \} \\ q_{22} &= \frac{1}{|h|} \{ j\omega_2 (d_{22} h_{11} - d_{12} h_{21}) \}\end{aligned}\quad (7)$$

$$|h| = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}\quad (8)$$

で与えられる. 更に上式中の変量は

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \int_V \varepsilon |\mathbf{E}_1|^2 dv, & g_{12} &= \int_V \varepsilon \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 dv \\
 g_{21} &= \int_V \varepsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* dv, & g_{22} &= \int_V \varepsilon |\mathbf{E}_2|^2 dv \quad (9) \\
 c_{11} &= \int_V \varepsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 dv, & c_{12} &= \int_V \varepsilon_2 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 dv \\
 c_{21} &= \int_V \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* dv, & c_{22} &= \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2 dv \quad (10)
 \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= \int_V \mu |\mathbf{H}_1|^2 dv, & h_{12} &= \int_V \mu \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{H}_2 dv \\
 h_{21} &= \int_V \mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^* dv, & h_{22} &= \int_V \mu |\mathbf{H}_2|^2 dv \quad (11) \\
 d_{11} &= \int_V \mu_1 |\mathbf{H}_1|^2 dv, & d_{12} &= \int_V \mu_2 \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{H}_2 dv \\
 d_{21} &= \int_V \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^* dv, & d_{22} &= \int_V \mu_2 |\mathbf{H}_2|^2 dv \quad (12)
 \end{aligned}$$

などの積分として計算でき、更に

$$\varsigma_i = \frac{1}{\int \varepsilon_i |\mathbf{E}_i|^2 dV} = \frac{1}{W_i} \quad (13)$$

$$f_{ij} = \int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_i^* \times \mathbf{H}_j) dS \quad (14)$$

なる関係が必要である

我々は常にマクスウェルの方程式を出発点として結合モード方程式を導出してきたが、何故か従来発表されている結合モード理論では式(4)の係数はマクスウェル方程式とは無関係に随意に与えるものとされていて、結合の本質を問うものではなかった[8],[9]。それゆえ本論文は共振器を構成する物質、その構造などを含め電磁界現象を解くという姿勢を明確に保ってモード結合を論ずる予定である。

3. 金属共振器間の結合

この章では一様な媒質中に置かれた図1に示すような二つの金属共振器の結合について論じる。

共振周波数が等しいとの仮定をつけ加えると

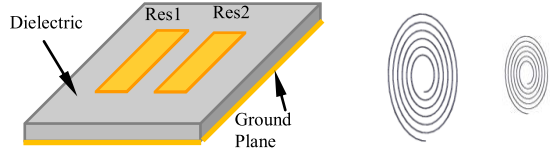
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \quad (15)$$

が成り立つので式(9)-(12)から

$$g_{ij} = c_{ij}, \quad h_{ij} = d_{ij} \quad (16)$$

が得られる。更に $i = j$ のときには

$$f_{ii} = 0 \quad (17)$$



Microstrip resonator Spiral resonator

図1 マイクロ波技術及びWPT技術に登場する代表的な金属共振器結合

Fig.1 Typical resonators used in microwave and WPT technologies.

となる事は式(14)の表面積分を体積分に直し式(2)を用いたあと、共振器の磁気/電気エネルギーの等しい事を利用して証明できる。

一方 $i \neq j$ のときにも同じく表面積分を体積分に直して式(2)を用いると

$$\begin{aligned}
 f_{ij} &= \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_i^* \times \mathbf{H}_j) dS \\
 &= \int_V (\nabla \times \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{H}_j - \mathbf{E}_i^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}_j) dV \\
 &= j\omega_0 \int_V (\mu \mathbf{H}_i^* \cdot \mathbf{H}_j - \varepsilon \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{E}_j) dV \quad (18)
 \end{aligned}$$

と変形されるので式(13)を合わせて

$$\varsigma_1 f_{12} \times \varsigma_2 f_{21} = -\omega_0^2 \frac{\left| \int_V (\mu \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{H}_2 - \varepsilon \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2) dV \right|^2}{\int_V \varepsilon |\mathbf{E}_1|^2 dV \int_V \varepsilon |\mathbf{E}_2|^2 dV} \quad (19)$$

となる、そこで

$$-\frac{\varsigma_1 f_{12} \times \varsigma_2 f_{21}}{\omega_0^2} = k^2 \quad (20)$$

とおけば式(13)後半によって

$$k^2 = \frac{\left| \int_V (\mu \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{H}_2 - \varepsilon \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2) dV \right|^2}{W_1 W_2} \quad (21)$$

となる。さて式(15),(16)を式(5)-(8)に代入すれば

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= j\omega_0, & p_{12} &= -\varsigma_1 f_{12}, & p_{21} &= -\varsigma_2 f_{21}, & p_{22} &= j\omega_0 \\
 q_{11} &= j\omega_0, & q_{12} &= 0, & q_{21} &= 0, & q_{22} &= j\omega_0 \quad (22)
 \end{aligned}$$

を得るのでこれらを式(4)に代入して結合モード方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \omega_0^2 a_1 + j\omega_0 \varsigma_1 f_{12} a_2 &= 0 \\ \frac{d^2 a_2}{dt^2} + j\omega_0 \varsigma_2 f_{21} a_1 + \omega_0^2 a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

と簡略化される, そこで a_1, a_2 が $e^{j\omega t}$ に比例すると仮定してそれを式 (23) に代入すると

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) a_1 + j\omega_0 \varsigma_1 f_{12} a_2 &= 0 \\ j\omega_0 \varsigma_2 f_{21} a_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

が成り立つ. a_1, a_2 の係数行列式は 0 でなければならぬのでその解は

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 \pm k) \quad (25)$$

となる, ここで式 (20) を用いた. 高い方の角周波数を ω_h , 低い方を ω_ℓ とおくと

$$\omega_h = \omega_0 \sqrt{1+k} \quad \omega_\ell = \omega_0 \sqrt{1-k} \quad (26)$$

と書ける.

結合した二つの共振器の電界はこれら 2 モードの一次結合で書けるので

$$\begin{aligned} a_1 &= C_1 \exp(j\omega_h t) + C'_1 \exp(j\omega_\ell t) \\ a_2 &= C_2 \exp(j\omega_h t) + C'_2 \exp(j\omega_\ell t) \end{aligned} \quad (27)$$

と表される. ここで初期条件として $t=0$ において共振器 1 は振幅 1, 共振器 2 は 0 とすると

$$\begin{aligned} C_1 + C'_1 &= 1 \\ C_2 + C'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

を得る, 一方高周波, 低周波の各モードは式 (24) のどちらかを満たす必要があるので

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega_h^2) C_1 - j\omega_0 \varsigma_1 f_{12} C_2 &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega_\ell^2) C_1 - j\omega_0 \varsigma_1 f_{12} C'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

という関係が成り立つ. これらに式 (26) に代入して

$$\begin{aligned} -k\omega_0 C_1 + j\varsigma_1 f_{12} C_2 &= 0 \\ k\omega_0 C_1 + j\varsigma_1 f_{12} C'_2 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となるので

$$\frac{k\omega_0}{j\varsigma_1 f_{12}} = A \quad (31)$$

と置いて式 (28) と (30) から

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C'_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{A}{2}, \quad C'_2 = -\frac{A}{2} \quad (32)$$

を得る. 式 (32) を式 (27) に代入すれば

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \{ \exp(j\omega_h t) + \exp(j\omega_\ell t) \} \\ &= \exp\left(j \frac{\omega_h + \omega_\ell}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_h - \omega_\ell}{2} t\right) \\ a_2 &= \frac{jA}{2} \{ \exp(j\omega_h t) - \exp(j\omega_\ell t) \} \\ &= -jA \exp\left(j \frac{\omega_h + \omega_\ell}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_h - \omega_\ell}{2} t\right) \end{aligned} \quad (33)$$

という最終結果に到達する

この式の実数部を図示すると図 2 のようになり, 二つの共振器間をエネルギーがやり取りされる事がわかる, その周期 T_m は式 (33) から明らかのように

$$\frac{\omega_h - \omega_\ell}{2} T_m = \pi \quad (34)$$

で計算できるので, 式 (26) を参照して

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega_h - \omega_\ell} \approx \frac{2\pi}{\omega_0 k} \quad (35)$$

となるが, $2\pi/\omega_0$ は共振周期であるからそれを T_0 で表して

$$k = \frac{T_0}{T_m} = \frac{\omega_h^2 - \omega_\ell^2}{\omega_h^2 + \omega_\ell^2} \quad (36)$$

なる関係が得られる. 最後の関係は式 (26) による.

式 (36) の k と角周波数の関係式は広く共振器の結合係数として知られている式 (k の第 1 表現) であるが, 何故かその根拠はあまり知られていない. 実はここに求められたエネルギー交換の周期 T_m との関係が

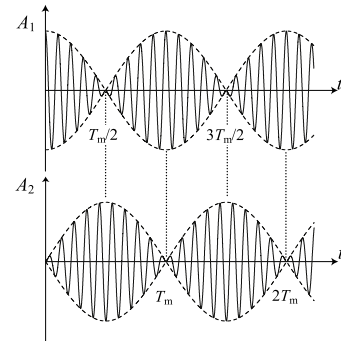


図 2 二つの共振器の電界振幅時間変化
Fig. 2 Time varying E-field amplitude of two coupled resonators.

その根拠であり、二つの共振器間のエネルギー交換の頻度が共振器の結合係数と考えれば普遍的な物理量であるエネルギーによって記述されたという事によって最も根拠的で一般性が高い表現 (k の第 2 表現) という事ができる。ただ、一般性が高いとは言ってもこの表現とて結合の本質を表すものではなく、共振器のもつエネルギーは結合の結果を反映しているに過ぎないので、これを定義として用いるには抵抗がある。共振器に対してそのエネルギーを獲得させたものが何かを見出して初めて結合の本質に迫る事ができるであろう。

いまやこの k は共振器間結合係数らしいことがわかったので、式 (21) によって導入された k も結合係数らしいものの 3 番目の表現として、二つの共振器のもつ電磁界の重なり積分で与えられている。この表現も有益であり、結合が磁気的か電気的かを見極めたいときや、その比を制御したいときなどに不可欠である。我々はワイヤレス給電システムを、送受共振器間に存在する誘電体の影響から自由にするためにしばしば利用している [6], [7]。

しかしまえばきで述べた如くこの積分表現には物体が登場しない。積分領域は一定の何もない空間だけに限られていてそこに存在する二つの共振器の電磁界は空間では何ら相互作用しない。言い換えれば何もない空間では電磁界の結合は起らない。そこで式 (18) を異なった形に変形してみよう。その結果

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_i^* \times \mathbf{H}_j) dS = \int_S \mathbf{E}_i^* \cdot (\mathbf{H}_j \times \mathbf{n}) dS \\ &= - \int_S \mathbf{E}_i^* \cdot \mathbf{K}_j dS \end{aligned} \quad (37)$$

という関係式が得られることが分かる。上のように f_{ij} を共振器 i の作る電界 \mathbf{E}_i と共振器 j の表面電流 \mathbf{K}_j の内積で表す事ができたが、これこそが相互作用を表す関係式である。外部から加えられた電界が導体中の荷電粒子に力を加えそれを動かしているという描像がここにあり、これは導電電流の行う仕事量を表している。この表現にもとづく k は式 (20) より

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{-S_1 f_{12} \times S_2 f_{21}}{\omega_0^2} \\ &= - \frac{\int_S \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{K}_2 dS \int_S \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{K}_1 dS}{\omega_0^2 W_1 W_2} \end{aligned} \quad (38)$$

となる。これで k の 4 番目の表現が得られたが他の表

現との比較は 5. で行う

4. 誘電体共振器間の結合

このタイプの代表とされるマイクロ波誘電体共振器は高い比誘電率と無負荷 Q の故に通信システムで広く用いられている、収納用金属ケースが近接し過ぎると鏡像の影響を考える必要があるが、そうでなければ式 (14) と (11), (12) において

$$f_{ij} = 0, \quad h_{ij} = d_{ij} \quad (39)$$

とする事ができる、前章と同じく

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \quad (40)$$

と置くことにより式 (5), (8) において

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{j\omega_0(c_{11}g_{22} - c_{21}g_{12})}{|g|} \\ p_{12} &= \frac{j\omega_0(c_{12}g_{22} - c_{22}g_{12})}{|g|} \\ p_{21} &= \frac{j\omega_0(c_{21}g_{11} - c_{11}g_{21})}{|g|} \\ p_{22} &= \frac{j\omega_0(c_{22}g_{11} - c_{12}g_{21})}{|g|} \\ q_{11} &= j\omega_0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{21} = 0, \quad q_{22} = j\omega_0 \end{aligned} \quad (41)$$

となるので式 (4) は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{c_{11}g_{22} - c_{21}g_{12}}{|g|} a_1 \\ + \omega_0^2 \frac{(c_{12}g_{22} - c_{22}g_{12})}{|g|} a_2 &= 0 \\ \frac{d^2 a_2}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{(c_{21}g_{11} - c_{11}g_{21})}{|g|} a_1 \\ + \omega_0^2 \frac{c_{22}g_{11} - c_{12}g_{21}}{|g|} a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

となる、簡単化のため

$$\begin{aligned} c_{11}g_{22} &\gg c_{21}g_{12}, \quad c_{22}g_{11} \gg c_{12}g_{21} \\ g_{11}g_{22} &\gg g_{12}g_{21}, \quad g_{11} \cong c_{11}, \quad g_{22} \cong c_{22} \end{aligned} \quad (44)$$

である事を用いると式 (43) は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \omega_0^2 a_1 + \omega_0^2 \frac{c_{12} - g_{12}}{c_{11}} a_2 &= 0 \\ \frac{d^2 a_2}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{c_{21} - g_{21}}{c_{22}} a_1 + \omega_0^2 a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

と変形される。ここで式 (45) は式 (23) とともに結合

モード方程式として同じ形式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_1}{dt^2} + N_{11}a_1 + N_{12}a_2 &= 0 \\ \frac{d^2 a_2}{dt^2} + N_{21}a_1 + N_{22}a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

をもっている。実は式 (20) の k の表現は上式において

$$k^2 = \frac{N_{12}N_{21}}{N_{11}N_{22}} \quad (47)$$

と置いた事に等しいので、式 (46) と式 (45) を比較しながら式 (47) を用いると

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(c_{12} - g_{12})(c_{21} - g_{21})}{c_{11}c_{22}} \\ &= \frac{\int_V (\varepsilon_1 - \varepsilon) \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 dv \int_V (\varepsilon_2 - \varepsilon) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* dv}{\int_V \varepsilon_1 |\mathbf{E}_1|^2 dv \int_V \varepsilon_2 |\mathbf{E}_2|^2 dv} \\ &= \frac{\int_{R1} \mathbf{P}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 dv \int_{R2} \mathbf{P}_2^* \cdot \mathbf{E}_1 dv}{W_1 W_2} \end{aligned} \quad (48)$$

を得る。 \mathbf{P} は分極電流、 W は各共振器のもつ全エネルギーである。ここで積分範囲 $R1$, $R2$ は二つの誘電体共振器の内部のみであって、式 (38) と同じく物質内の荷電粒子（ここでは誘電体内の束縛電子）と励振電界の相互作用である事を示している。この表現は前章の第 4 表現に該当する。

逆に式 (48) の最初の表現は $(c_{12} - g_{12})(c_{21} - g_{21})$ を分子にもっており、 c_{ij} , g_{ij} の定義式 (9), (10) を見ればこの積分範囲は全空間であり重なり積分表現となっている。これは前章の第 3 表現に対応する。被積分関数は式 (9), (10) を見れば全て電界から成り、結合係数には磁界成分は一切関係しないことが分かる。ここでも「実像と虚像」による表現が得られたと考えると良い。

5. 結合係数の相互比較

まず時間-周波数表現については式 (36) に両者が示されているので、それらを表 1 にまとめる。前述のように時間表現はエネルギー交換の周期で結合係数を表しているの、素粒子論において中間子のやり取りが陽子/中性子間の結合の源泉になっている事を彷彿させる。**3.** で示した方法を拡張して一般的な結合モード方程式から出発すると式 (23) から (33) まで辿る事により自然に時間による表現と周波数による表現が等価である事が証明できるので、この関係はあらゆる共振

表 1 結合係数の現象論/実体的表現
Table 1 Phenomenological and substantialistic expression of coupling coefficient.

名称	結合を表現する変数	表現式	備考
(1) 周波数領域表現	結合によって分離した 2 つの周波数 f_1 , f_2 を用いる	$k = \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 + f_2^2}$	現象論的
(2) 時間領域表現	2 共振器間を電力がやりとりされる周期 T_m と自己共振周期 T_0 を用いる	$k = \frac{T_0}{T_m}$	実体的

器間結合において成り立つと言える。これらは結合係数の「実像と虚像」を構成している。しかし両表現共あらゆる共振器に対して実験、電磁界シミュレーションによる結合係数決定に使用でき、特に周波数表現は便利である。

次に共振器をその構成物質で分類した場合導体、誘導体が代表的である。その分類の中で（代表して）導体に対応する結合係数の表現を表 2 に示したが重なり積分表現と電流エネルギー表現に更に分類される。エネルギーに關与する電流は共振器材質によって導電電流、分極電流に分けられこれらは全て電子運動という実体に基づいている。表 2 は導体共振器なので導体表面電流で結合係数は表現される。それに対して重なり積分は必ず共振器の外部空間に存在する電界/磁界の夫々のスカラー積を合算する必要があり、重なり積分そのものは物理的な実体ではないため虚像である。しかしこの表現は結合の質に踏み込んで、磁界/電界結合を識別して計算可能であるため非常に有用である。

重なり積分表現を見渡したとき、導体共振器の場合は式 (21) において磁界、電界の両者が被積分関数として存在するのに対して誘電体共振器の場合式 (48) のように磁界の寄与は全く存在せず電界だけが関与している事がわかる。その結果、金属共振器の結合係数は磁界/電界両成分から構成されるのに対して誘電体共振器の場合は純粋に電界成分しか存在しないという事である。これは導電電流が磁界/電界を誘起するのに対して分極電流は媒質が非磁性であるために電界しか誘起しないためと解釈できる。

共振器の素材として利用可能な物質には上記の他に磁性体がある。それはフェライト等の絶縁性磁性体、鉄などの導電性磁性体に分けられる。前者は磁性と誘

表 2 結合係数の実体論/本質論的表現
Table 2 Substantialistic and essentialistic expressions of coupling coefficient.

名称	結合を表現する変数	表現式	備考
(3)重なり積分表現	結合前の2共振器の電界/磁界それぞれの内積を積分した量と各共振器の持つエネルギー W_1W_2 との比	$k^2 = \frac{\left \int_V (\mu \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{H}_2 - \varepsilon \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2) dV \right ^2}{W_1 W_2}$	実体論的
(4)電流エネルギー表現	結合前の1共振器の電界が相手側の電流を励振した時の電流エネルギーと各共振器の持つエネルギー W_1W_2 との比	$k^2 = \frac{\int_V \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{K}_2 dV \int_V \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{K}_1 dV}{\omega_0^2 W_1 W_2}$	本質論的

電性をもっているため結合は磁界/電界結合の混合となつて誘電体の場合ほど簡単ではないが、磁界/電界は双対的であるため結合モード方程式は対称性が高く比較的扱いやすいだろうと想像できる。それだけでなく低損失の材料も入手可能であるから実用性が期待され解析の価値がありそうである。一方後者の導電性磁性体では磁性と導電性をもつために方程式の対称性は低くより複雑である上に、導電性が中途半端であるため損失の大きいことが予想されるため結合係数の解析は実り薄そうである。

本論文では結合係数という概念を表すと考えられる4種の表現の等価性を証明し、その有用性を説明した。ある概念の定義がどうであれ、それが有用でなければ意味がない。これまで多くの場面で使われ有用であるという事、更にこれらは物理的に納得できる表現であることでこれら4種の表現は結合係数を表す量であると断言しても差し支えないと考えられる。

それでは結合係数の定義はどうすればよいであろうか。「定義」とは広辞苑によれば「ある概念の内包を構成する本質的属性を明らかにし、他の概念から区別すること」とあるが、ここで「内包」とは論理学用語であり、日常語で簡単に言えば「意味」「中身」「性質」といった事を指す。そこで広辞苑の「定義」では「本質的」という言葉がキーワードであることが分かる。その結果、我々の言うところの本質論的表現である「励振された電流による表現」式(28)、(38)が結合係数の定義として最もふさわしいということになる。

6. む す び

共振器間の結合係数の起源、計算式の導出法、その意味、式相互の関連について最近得た知見をもとに整

理した。まえがきにも示したようにこの物理量は多くの分野で使われているにもかかわらず、上記のような考察が十分に行われていない。

しかし今回の報告で共振器間結合係数に関する考察は必要事項を網羅し終ったものと考えており、それらをまとめると以下ようになる。

- (1) 共振器間結合の本質は双方の電磁界による相手方共振器を構成する媒質内電流の励振強度である事が導出できた。したがってこの表現を共振器間結合係数の定義と考えてよいであろう。
- (2) 結合係数のそれと等価な表現として直接的なものと同接的なものがあり、全てが相互に等しいことを証明した。前者を実体論的表現(実像)、後者を現象論的表現(虚像)と名付けたが、どちらも現実を反映しておりその意味が理解できる。
- (3) 「実像」には重なり積分と、エネルギー交換による記述がある。「虚像」は、周波数による記述であり(1)の本質的定義と合わせて計4種類の等価な表現法のなかで「虚像」に近い方がむしろ使い勝手はよい。
- (4) 重なり積分による表現から新しく見出された特性は、誘電体共振器間は電界結合だけ、磁性体(誘電性をもたない仮想的磁性体)共振器間は磁界結合だけ、導体共振器間は磁界・電界結合の両方が関与するという事実であるが、考えて見れば当然かも知れない。

上記(1)のような本質が明らかになった今、次のステップとしては非共振系の結合にもこの励振概念を適用して結合概念の拡張ができるのではないかと考えている。

文 献

- [1] I. Awai, "New expressions for coupling coefficient between resonators," IEICE Trans. Electron., vol.E88-C, no.12, pp.2295-2301, Dec. 2005.
- [2] 武谷三男 (編著), 自然科学概論 第2巻—現代科学と科学論—, 勁草書房, 東京, 1960.
- [3] I. Awai and Y. Zhang, "Overlap integral calculation of resonator coupling," Proc. 12th International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics and URSI/CNC Conference, pp.589-592, Montreal, July 2006.
- [4] 粟井郁雄, 張 陽軍, "共振器の結合係数-直感的理解へのひとつの道," 信学論 (C), vol.J89-C, no.12, pp.962-968, Dec. 2006.
- [5] I. Awai, Y. Zhang, T. Komori, and T. Ishizaki, "Coupling coefficient of spiral resonators used for wireless power transfer," Proc. 2010 APMC, pp.1328-1331, Yokohama, Japan, Dec. 2010.
- [6] 粟井郁雄, 澤原裕一, 石崎俊雄, "磁界結合共振器 WPT システムによる隔壁給電," 信学技報, WPT2014-19, April 2014.
- [7] 粟井郁雄, "共鳴 (共振) 送電の基礎理論," 電界磁界結合型ワイヤレス給電技術, 篠原真毅 (編), 第2章, pp.9-60, 科学情報出版株式会社, 2014.
- [8] H.A. Haus and W.P. Huang, "Coupled-Mode theory," Proc. IEEE, vol.79, no.10, pp.1505-1518, Oct. 1991.
- [9] A. Karalis, J.D. Joannopoulos, and M. Soljacic, "Efficient wireless non-radiative mid-range energy transfer," Ann. Phys., vol.323, no.1, pp.34-48, 2008.

(平成 27 年 7 月 17 日受付, 11 月 11 日公開)



張 陽軍 (正員)

1992 中国上海工業大学修士課程了。2000 静岡大・電子科学研究科博士課程了。同年同大助手。2003 年龍谷大学理工学部助手, 現在龍谷大准教授。マイクロ波水分計測, アンテナ, マイクロ波共振器に関する研究に従事。博士 (工学)。IEEE, IEICE 会員。



粟井 郁雄 (正員:フェロー)

昭 38 年京大・工・電子卒。昭 43 同大学院博士課程了。同年京大助手。以来マイクロ波帯における磁気波の研究, 光集積回路の研究に従事。昭 59 (株)ユニデン技師長 各種無線機の開発を担当。平 2 山口大・工・教授, 静磁波デバイス, 誘電体フィルタ, 平面形フィルタ, 超伝導フィルタ, 人工誘電体の研究に従事。平 16 龍谷大・理工・教授, 共振器, フィルタ, メタマテリアルのマイクロ波応用, 非接触電力伝送の研究を行った。平 23 株式会社リユーテック開業。代表取締役として非接触給電技術の開発に従事。平 14, 26 電子情報通信学会論文賞受賞。同学会マイクロ波研究専門委員会委員長, IEEE MTT-S Japan Chapter Chairman, IEEE Hiroshima Section Chairman, IEEE MTT-S Kansai Chapter Chairman を歴任。電子情報通信学会フェロー, IEEE Life Fellow。