

疑似線形理論による発振回路注入同期現象の定式化

——紙と鉛筆でロックレンジと Q ファクタを探求する——

大平 孝†

Pseudolinear Theory to Characterize Injection Locked Oscillators

—— Explore Locking Range and Q Factor with Pencil and Paper ——

Takashi OHIRA†

あらまし 発振回路に外部信号が注入されると内部での信号位相が変化, 注入信号周波数が自走発振周波数に近ければ発振周波数が注入信号に引き込まれる. この現象を各節点電圧の複素 (I - Q) 平面上のベクトルで表現する. 注入信号の電圧と周波数を独立に掃引して, 同期するかどうかを判定しマップ表示する. 注入電圧を上げるとまたは Q ファクタを下げれば同期帯域幅が広がる. 1 個の FET と複数の受動素子からなる能動回路を記述できる一般モデルを示す. 受動部分を 3 ポート網とみなして 3×3 インピーダンス行列で特徴づける. この行列要素の周波数特性によって回路の発振周波数と Q ファクタが決定する. その行列要素のうち, 注入端子からゲート電極への結合インピーダンス, 並びにドレイン電極からゲート電極への結合インピーダンスが注入同期発振の特性を定める支配的役割を果たす. 得られた Q ファクタの値をアドラーの式に代入することにより注入同期周波数範囲を見積もることができる. つまり, 回路図 \Rightarrow ポートパラメータ $\Rightarrow Q$ ファクタ $\Rightarrow \Delta\omega$ という手順で同期範囲を見積もることが可能となった. 本論文で述べる手法は SPICE などの時間領域シミュレーションに比べて格段に見通しが良くかつエレガントである.

キーワード 発振, 注入同期, ロックレンジ, Q ファクタ, 線形理論

1. ま え が き

ハードウェアシステムの高周波化と高密度集積化が進むに伴い, 発振回路が他のアナログ・デジタル回路からの信号回り込み干渉を受ける可能性が高まる. また逆に, 注入同期現象を積極的に利用することにより注入同期増幅, 通倍, 分周などの高周波アナログ信号処理機能が達成できる. いずれの場合の設計にも基礎知識として注入同期現象の理解が必修である.

一般に発振は非線形現象であると認識されているため, 設計には SPICE などの回路シミュレータが用いられるのが主流となっている. 特に, 注入同期引き込みは非線形効果の本質であるとの理解から時間領域での数値解析に頼るのが現状である. 例えば具体的回路で同期周波数振幅範囲 (ロックレンジ) を調べるには, 注入周波数と注入振幅レベルの両方を掃引しなが

ら出力電圧波形を観測することになり作業的に非効率である.

本論文では発振と注入同期の本質を見通しよく説明するための理論を示す. 本来非線形である振幅飽和動作を準線形現象であるとみなす. アナログ回路エンジニアが RF 周波数領域解析で使い慣れた複素電圧/複素電流の手法を用いて動作を解き明かす.

2. ブロックダイヤモデル

周波数 $\omega_0 (= 2\pi f_0)$ で発振している能動回路に外部から $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ の正弦波信号を注入するという状態を表現できる最も簡単なモデルを図 1 に示す. このモデルは発振を起こすために最小限必要な機能である増幅と帰還から成る. 出力ポートは信号を観測するために設けてあり, エネルギーを外部に取り出すことは意識しなくてよい [1]. これに外部から信号電圧を注入するための入力ポート及び電圧加算手段を設ける. 増幅部は順方向小信号利得が無限大であり飽和出力電圧が $\pm V_0$ であるハードリミタを想定する

† 豊橋技術科学大学, 豊橋市
Toyohashi University of Technology, Toyohashi-shi, 441-8580 Japan

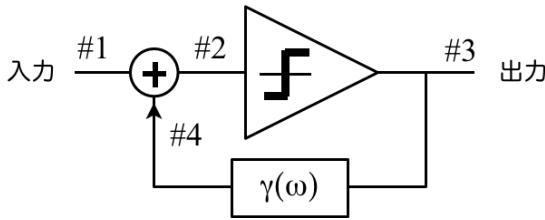


図 1 注入同期発振回路ブロックダイヤモデル
 #1 に入力がない場合、#2→#3→#4→#2→…
 という無限ループで自走発振がおこる。そこへ#1
 から外部信号が注入されると、#2 での信号位相が
 変化する。注入信号周波数が自走発振周波数に近け
 れば発振周波数が注入信号に引き込まれる。

Fig. 1 Injection locked oscillator block diagram.

($V_o > 0$)。これが唯一非線形能動要素であり、それ以外の要素は全て線形受動である。帰還部は電圧伝達関数 $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ をもつ単方向線形受動 2 ポート回路とする。なお、現実の高周波回路設計では入出力インピーダンスや双方向伝達係数を含めたフル 2 ポートパラメータ [2] が必要であるが、このブロックダイヤモデルでは簡単のため無視する。それらは次節で述べる回路レベルのモデルで考慮する。

2.1 信号の複素数表現

図 1 のモデルにおける全ての信号電圧波形に時間因子 $e^{j\omega t}$ を仮定し、回路動作を周波数領域で考える。各節点における電圧を複素数として扱い、これらを振幅 (絶対値) と位相 (偏角) 因子の積に分解して

$$\begin{array}{cccc} \text{節点:} & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\ \text{電圧:} & v_1 e^{j\phi_1} & v_2 e^{j\phi_2} & v_3 e^{j\phi_3} & v_4 e^{j\phi_4} \end{array} \quad (1)$$

と書く。ここで j は虚数単位である。増幅部にハードリミタを想定しているので出力波形が矩形波となり高調波成分が含まれるが、この論文では理解を容易にするため出力電圧の基本周波数成分のみに着目する。式 (1) に示す複素電圧表記を用いて各要素の機能を記述すると

$$\text{加算: } v_2 e^{j\phi_2} = v_1 e^{j\phi_1} + v_4 e^{j\phi_4} \quad (2)$$

$$\text{増幅: } v_3 e^{j\phi_3} = \kappa V_o e^{j\phi_2} \quad (3)$$

$$\text{帰還: } v_4 e^{j\phi_4} = \gamma(\omega) v_3 e^{j\phi_3} \quad (4)$$

となる。式 (3) はリミタのクリップ効果により入力電圧の振幅情報 v_2 が消失し、位相情報 ϕ_2 だけが ϕ_3 へ伝達することを表現している。その出力は矩形波振幅 V_o を正弦波振幅に換算するためにフーリエ係数 $\kappa = 4/\pi$ 倍となっている。

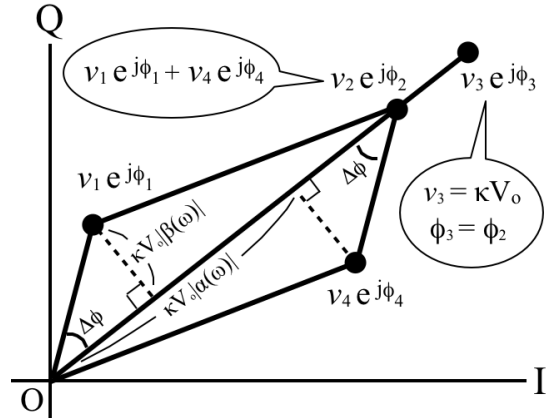


図 2 各節点電圧の複素 (I-Q) 平面上表示
 回路が注入同期状態にあるとき図 1 の各節点電圧を
 表す複素数が四つの●である。注入周波数が自走発
 振周波数から離調していくと、節点#1 と#2 の間
 の位相差 $\Delta\phi$ が広がる。 $\Delta\phi$ が ± 90 度になるとき
 が同期の臨界状態である。

Fig. 2 Voltage for each node plotted on complex I-Q plane.

2.2 特性方程式

このモデルにおける各節点の電圧の相互関係は図 2 に示すように複素平面上的直交座標系にプロットすると視覚的に捉えやすい。入力電圧と帰還電圧の和を増幅して出力電圧が得られる。数式的には変数が四つもあって複雑である。そこで v_3 と v_4 を消去しよう。式 (2) に (3) と (4) を代入すると

$$\begin{aligned} v_2 e^{j\phi_2} &= v_1 e^{j\phi_1} + \gamma(\omega) v_3 e^{j\phi_3} \\ &= v_1 e^{j\phi_1} + \gamma(\omega) \kappa V_o e^{j\phi_2} \end{aligned}$$

となる。これで v_1 と v_2 だけの関係が得られた。この両辺を $e^{j\phi_2}$ で割って、これらの位相差を $\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi$ と書くと

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 e^{j\phi_1 - j\phi_2} + \gamma(\omega) \kappa V_o \\ &= v_1 e^{j\Delta\phi} + \{\alpha(\omega) + j\beta(\omega)\} \kappa V_o \end{aligned}$$

となる。更に、オイラー公式

$$e^{j\Delta\phi} = \cos \Delta\phi + j \sin \Delta\phi$$

を用いて上式両辺の実部と虚部を抽出すると

$$v_1 \cos \Delta\phi + \alpha(\omega) \kappa V_o = v_2 \quad (5a)$$

$$v_1 \sin \Delta\phi + \beta(\omega) \kappa V_o = 0 \quad (5b)$$

を得る。これがこのモデルにおける発振特性を決定す

る方程式である．そこで本論文ではこれを「特性方程式」と呼ぶこととする．注入電圧振幅 v_1 を与えると式 (5b) で位相差 $\Delta\phi$ が決まり，更に式 (5a) から内部電圧振幅 v_2 が決まる．発振が成立するとは，特性方程式を満たす $\Delta\phi$ と ω の解が存在することである（注：変数の定義域 $v_1 \geq 0, v_2 > 0$ に配慮する）．特性方程式 (5) の解を探索することにより，このモデルにおける自走発振並びに注入同期の動作をわかりやすく説明することができる．

2.3 自走発振

自走発振（フリーラン）とは，注入電圧がゼロで，なおかつ，回路内のいずれかの節点に非ゼロの交流電圧が観測される状態であると捉える [1]．これを式で記述すると

$$v_1 = 0, \quad v_2 > 0$$

である．これを特性方程式 (5) に代入し，その解を ω_0 と書くと

$$\alpha(\omega_0) > 0, \quad \beta(\omega_0) = 0 \tag{6}$$

となる．これが自走発振条件である．これを満たす ω_0 を自走発振周波数と呼ぶ ($\omega_0 > 0$)．この式自体は抽象的に見えるが，あとの 3.3 で示す具体的計算例で物理的意味の理解を深める．

2.4 注入同期

周波数 ω_0 で自走発振している状態で，外部から正弦波電圧

$$v_1 e^{j\phi_1}; v_1 > 0, \quad 0 \leq \phi_1 < 2\pi$$

を注入する．注入周波数 ω が自走発振周波数 ω_0 から $\Delta\omega$ だけ離調しているとして $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ と書く．もし ω が ω_0 の十分近傍，すなわち $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ であれば発振周波数が注入信号に引き込まれる．これを注入同期状態と呼ぶ．この状態では，もはや回路内に ω_0 成分は存在せず，全ての電圧が $\omega_0 + \Delta\omega$ に同期している．

このような同期状態が成立するための注入振幅と周波数の関係を調べてみよう．位相差を規定する特性方程式 (5b) に着目する．この方程式を満たす解が $\omega = \omega_0$ で存在することは既に自走発振の項で述べたとおりである．ここで知りたいのは，その近傍にも $\Delta\phi$ の解が存在し得るかどうかである．近傍条件 $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ を前提として，特性方程式の中にある $\beta(\omega)$ を ω_0 の周

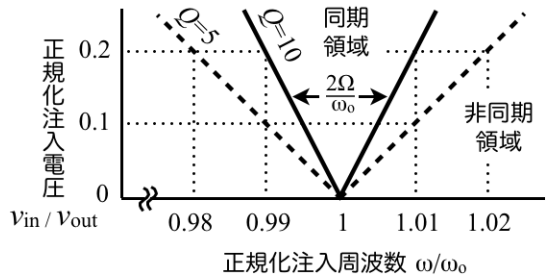


図3 注入同期発振回路のロックレンジ
注入信号の電圧と周波数を独立に掃引して，同期するかどうかを判定しマップ表示する．V字の上側が同期領域，両外側が非同期領域となる．注入電圧を上げるかまたは Q ファクタを下げれば同期帯域幅が広がる．

Fig. 3 Injection locked oscillator locking range.

りでテイラー展開し，更に式 (6) を用いると

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \beta(\omega_0 + \Delta\omega) \\ &= \beta(\omega_0) + \Delta\omega\beta'(\omega_0) \\ &= \Delta\omega\beta'(\omega_0) \end{aligned}$$

となる．プライム記号'は周波数微分演算 $d/d\omega$ を示す．これにより特性方程式 (5b) は

$$v_1 \sin \Delta\phi = -\Delta\omega\beta'(\omega_0)\kappa V_0 \tag{7}$$

となる．この絶対値を考えると， $|\sin \Delta\phi| \leq 1$ なので

$$v_1 |\sin \Delta\phi| = |\Delta\omega\beta'(\omega_0)|\kappa V_0 \leq v_1$$

すなわち

$$|\Delta\omega| \leq \frac{v_1}{|\beta'(\omega_0)|\kappa V_0} = \Omega \tag{8}$$

を得る．この不等式が成立しているときに特性方程式が解をもつ．言い換えると

$$\omega_0 - \Omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega$$

が同期状態が成立する周波数範囲である．この様子を図3に示す．V字の上側領域がロックレンジ Ω である（幅としては両側波帯で 2Ω ）．注入信号がこの範囲を越えて離調すると同期が崩れる．

このように， Ω は注入同期の性能指標として使える．しかし一方で， Ω は周波数の次元をもっており，また式 (8) が示すとおり注入電圧にも依存してしまう．回路の特性を評価するには，入力信号に依存しない無次元の指標を導入することが望ましい．そこで，その回

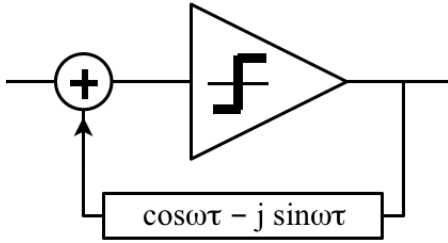


図4 遅延線帰還発振回路
Fig. 4 Delay line feedback oscillator.

路に固有の周波数依存性を定量的に示す指標として

$$Q = \frac{\omega_0}{2} |\beta'(\omega_0)|, \quad \beta'(\omega_0) = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \quad (9)$$

を定義する。これにより、式(8)は

$$|\Delta\omega| \leq \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \frac{v_1}{\kappa V_0}$$

と書き換えることができる。更に $v_1 = v_{in}$, $\kappa V_0 = v_{out}$ と解釈すると、これは1946年にアドラー[3]によって示された不等式

$$|\Delta\omega| \leq \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \frac{v_{in}}{v_{out}} \quad (10)$$

に一致する。

帰還部の伝達関数の虚部の周波数微分が注入同期を支配する Q ファクタであることがわかった。発振回路の設計段階でロックレンジを予測するには、式(9)を用いて Q ファクタを計算し、それをアドラーの式(10)に代入すればよい。

2.5 遅延線帰還発振回路

最もわかりやすい例として帰還部が単純な遅延線である発振回路を図4に示す。帰還部の遅延時間を τ とするとその伝達関数は $\gamma(\omega) = e^{-j\omega\tau}$ である ($\tau > 0$)。これに自走発振条件式(6)を適用すると

$$\begin{aligned} \alpha(\omega_0) &= \cos \omega_0 \tau > 0 \\ \beta(\omega_0) &= -\sin \omega_0 \tau = 0 \end{aligned}$$

となる。これを満たす発振周波数として

$$\omega_0 = \frac{2m\pi}{\tau}$$

が求まる。つまり遅延時間 τ を周期とする基本発振モード及びその整数倍の周波数で発振するモードがある。ここで $m = 1, 2, 3, \dots$ は自走発振のモード次数と呼ばれる。なお $m = 0$ も数学的には可能であるが、

これは増幅部出力電圧が $+V_0$ 。または $-V_0$ 。に直流的にラッチアップしている状態を意味しており通常発振とは区別する。

この発振回路の Q ファクタとロックレンジを求めてみよう。遅延線の伝達関数の虚部とその周波数傾斜は

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \text{Im}\{e^{-j\omega\tau}\} = -\sin \omega\tau \\ \beta'(\omega) &= d\beta(\omega)/d\omega = -\tau \cos \omega\tau \end{aligned}$$

である。これに自走発振周波数 $\omega_0 = 2m\pi/\tau$ を代入すると

$$\beta'(\omega_0) = -\tau \cos \omega_0 \tau = -\tau$$

となる。これらを式(9)に代入すると

$$Q = \frac{\omega_0}{2} |\beta'(\omega_0)| = \frac{\omega_0 \tau}{2} = m\pi$$

という結果を得る。モード次数に比例して Q ファクタが高くなることを示している。この Q ファクタをアドラーの式(10)に代入することにより、ロックレンジが

$$2\Omega = \frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{v_1}{\kappa V_0} = \frac{\pi v_1}{2\tau V_0}$$

と求まる。例えば $\tau = 1 \text{ ns}$, $V_0 = 1 \text{ V}$, $v_1 = 100 \text{ mV}$ のとき自走発振周波数は $\omega_0/2\pi = 1, 2, 3, \dots \text{ GHz}$ 、ロックレンジはモード次数に関わりなく $2\Omega/2\pi = 25 \text{ MHz}$ となる。

3. 高周波回路モデル

前節で扱ったブロックダイヤモデルは各節点の信号を電圧だけで表現できるので基本原理を理解するのに有効である。これが高周波回路になると電圧と電流の両方を考慮する必要がある。なぜなら増幅部や帰還部などの構成要素は信号周波数が高くなると有限の自己及び結合インピーダンス値を呈するようになり、これによる信号の反射や逆方向伝達が性能を支配するようになるからである。これらの効果は設計の妨げになるというよりむしろ積極的に活用することにより高性能化を達成させることが肝要である。つまり高周波回路は、伝達関数ではなく、ポートパラメータ行列[2]を用いて初めて設計できる。

3.1 モデルの構成

高周波発振回路には用途や要求性能によって様々なトポロジーがある。ここではできるだけ多くのトポロジーを包含するように一般モデルを考える。ただし、定式化を容易にするため、発振に用いる能動素子は電

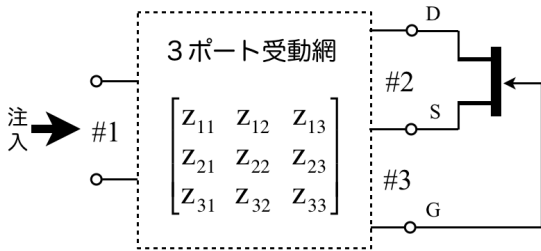


図5 FET発振回路の一般モデル
1個のFETと複数の受動素子からなる能動回路は全てこのモデルで記述できる。そこからFETを取り外して得られる受動網の任意の節点間に一つのポート#1を追加すると破線枠で示す3ポート網となる。3ポート網は3行3列のインピーダンスパラメータで完全に特徴づけられる。このパラメータの周波数特性によって回路の発振周波数とQファクタが決定する。

Fig.5 FET oscillator general model.

界効果トランジスタ (FET) 1個とする。FET以外の受動網全体を一つのブラックボックスで表すと図5のように書ける。出力ポートとそれに接続される負荷もこの受動網に含める [1]。FETは3端子デバイスなので受動網とは3本の線で結べば十分である。ドレイン端子Dとソース端子Sを1対としてポート番号#2を付与する。同様にゲート端子Gとソース端子Sを1対としてポート番号#3を付与する。端子Sが二つのポートで共通にコールド側と定義する。ただしこれはSを接地するという意味ではない。ドレイン接地でもゲート接地でもこのモデルで包含できる。

外部から信号を注入するため、回路内の任意の節点対を注入ポートに指定し、ポート番号#1を付与する。注入ポートはホット側コールド側を区別する必要がない。また、#1が#2または#3と重なっていてもよい。FETは電圧制御ON/OFF電流源であるとし、ON時ドレイン電流を I_o と書く ($I_o > 0$)。ゲート電流は常にゼロとする。FETが C_{gs} , C_{gd} , R_{ds} , L_s など寄生成分をもつ場合は、これらを全て受動網側に移設することによりそれらの影響を織り込む [5]。

前節同様全ての信号に時間因子 $e^{j\omega t}$ を仮定し、回路動作を周波数領域で考える。各ポートにおける電圧と電流を複素数として扱い、これらを振幅 (絶対値) と位相 (偏角) 因子の積として、それぞれ

$$\begin{array}{l} \text{ポート:} \quad \#1 \quad \#2 \quad \#3 \\ \text{電圧:} \quad v_1 e^{j\phi_1} \quad v_2 e^{j\phi_2} \quad v_3 e^{j\phi_3} \\ \text{電流:} \quad i_1 e^{j\psi_1} \quad i_2 e^{j\psi_2} \quad i_3 e^{j\psi_3} \end{array} \quad (11)$$

と書く。これを用いてFETと受動網の機能を記述すると

$$\text{FET:} \quad \begin{cases} i_2 e^{j\psi_2} = -\mu I_o e^{j\phi_3} \\ i_3 e^{j\psi_3} = 0 \end{cases} \quad (12a)$$

$$\text{受動網:} \quad \begin{bmatrix} v_1 e^{j\phi_1} \\ v_2 e^{j\phi_2} \\ v_3 e^{j\phi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 e^{j\psi_1} \\ i_2 e^{j\psi_2} \\ i_3 e^{j\psi_3} \end{bmatrix} \quad (12b)$$

となる。式 (12a) は FET の ON/OFF によりゲート電圧の振幅情報 v_3 が消失し、位相情報 ϕ_3 だけがドレイン電流位相 ψ_2 へ伝達することを表現している。ドレイン電流はその矩形波振幅 I_o から直流成分 ($= I_o/2$) 並びに高調波成分を差し引いて、基本波の正弦波振幅に換算するためフーリエ係数 $\mu = 2/\pi$ 倍となっている。負号は電流の方向がFETから受動網へ流れ込む方向を正としていることに起因する。モデルの記述はこれで完了である。

3.2 特性方程式

このモデルの発振動作を知るために、まず特性方程式を求めてみよう。式 (12a) を (12b) の第3行に代入し、得られた式の両辺を $e^{j\phi_3}$ で割ると

$$v_3 = z_{31} i_1 e^{j(\psi_1 - \phi_3)} - z_{32} \mu I_o \quad (13)$$

となる。この式はポート#1へ注入された電流並びにFETのドレインからの電流が受動網によってFETゲート電圧へどのように帰還されるかを表している。ここで登場したポートパラメータ z_{31} と z_{32} は受動網のトポロジと内部素子値によって決まる。受動網にはR, L, C, スタブ, 伝送線路などの素子が含まれているので、これらポートパラメータは一般に複素数であり、かつ、信号周波数 ω の関数である。そこでこれらを実部と虚部、あるいは、絶対値と偏角に分解して

$$z_{31}(\omega) = r_{31}(\omega) + jx_{31}(\omega) \quad (14a)$$

$$= |z_{31}(\omega)| e^{j\theta_{31}(\omega)} \quad (14b)$$

$$z_{32}(\omega) = r_{32}(\omega) + jx_{32}(\omega) \quad (14c)$$

$$= |z_{32}(\omega)| e^{j\theta_{32}(\omega)} \quad (14d)$$

と書く。式 (14b) と (14c) を用いると (13) は

$$v_3 = |z_{31}(\omega)| i_1 e^{j\{\theta_{31}(\omega) + \psi_1 - \phi_3\}} - \{r_{32}(\omega) + jx_{32}(\omega)\} \mu I_o$$

となる。オイラー公式を用いて上式を実部と虚部に分離し、 $\theta_{31}(\omega) + \psi_1 - \phi_3 = \delta(\omega)$ と書くと

$$|z_{31}(\omega)|i_1 \cos \delta(\omega) - r_{32}(\omega)\mu I_0 = v_3 \quad (15a)$$

$$|z_{31}(\omega)|i_1 \sin \delta(\omega) - x_{32}(\omega)\mu I_0 = 0 \quad (15b)$$

を得る．これが FET 発振回路の特性方程式である．注入電流振幅 i_1 を与えると式 (15b) で位相差 $\delta(\omega)$ が決まり，更に式 (15a) からゲート電圧振幅 v_3 が決まる．

3.3 自走発振

自走発振とは注入電流がゼロで，なおかつ，回路内のいづれかのポートに非ゼロの交流電圧が観測される状態である [1]．これを式で記述すると

$$i_1 = 0, \quad v_3 > 0$$

である．これを特性方程式 (15) に代入し，その解を ω_0 と書く

$$r_{32}(\omega_0) < 0, \quad x_{32}(\omega_0) = 0 \quad (16)$$

となる．これが自走発振条件であり，これを満たす ω_0 が自走発振周波数である．

3.4 注入同期

周波数 ω_0 で自走発振している状態で，外部から正弦波電流

$$i_1 e^{j\psi_1}; i_1 > 0, \quad 0 \leq \psi_1 < 2\pi$$

を注入する．注入周波数を $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ とし，近傍条件 $|\Delta\omega| \ll \omega_0$ を前提として， $x_{32}(\omega)$ を ω_0 の周りでテイラー展開すると

$$\begin{aligned} x_{32}(\omega) &= x_{32}(\omega_0 + \Delta\omega) \\ &= x_{32}(\omega_0) + \Delta\omega x'_{32}(\omega_0) \\ &= \Delta\omega x'_{32}(\omega_0) \end{aligned}$$

となる．つまり第 0 次項は式 (16) によりゼロであるので結局第 1 次項が支配項である．同様に $z_{31}(\omega)$ もテイラー展開する．こちらは第 0 次項が非ゼロで支配項なので単に $z_{31}(\omega) = z_{31}(\omega_0)$ となる．これらより特性方程式 (15b) は

$$|z_{31}(\omega_0)|i_1 \sin \delta(\omega_0) = \Delta\omega x'_{32}(\omega_0)\mu I_0 \quad (17)$$

となる． $|\sin \delta(\omega_0)| \leq 1$ に配慮して，上式の両辺の絶対値をとると

$$|z_{31}(\omega_0)|i_1 \geq |\Delta\omega x'_{32}(\omega_0)|\mu I_0$$

すなわち

$$|\Delta\omega| \leq \frac{|z_{31}(\omega_0)|}{|x'_{32}(\omega_0)|} \cdot \frac{i_1}{\mu I_0} \quad (18)$$

となる． Q ファクタを

$$Q = \frac{\omega_0}{2} \left| \frac{x'_{32}(\omega_0)}{z_{31}(\omega_0)} \right|, \quad x'_{32}(\omega) = \frac{dx_{32}(\omega)}{d\omega} \quad (19)$$

と定義すると，アドラーの式と同形の

$$|\Delta\omega| \leq \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \frac{i_1}{\mu I_0} \quad (20)$$

を得る．つまりこれで Q と回路パラメータの関係が明らかになった [4]．式 (16) から (20) までの計算プロセスはやや複雑に感じるが，図 6 に示すフローチャートで表すとわかりやすい．その使用例を次項で述べる．

3.5 コルピッツ FET 発振回路

FET 発振回路の具体例を図 7(a) に示す．ゲート接地 FET 増幅回路に二つの C で正帰還をかける．計算を簡単にするためこれら C は同じ容量値であるとする．この直列容量と所望周波数で共振させるためドレイン側に L を直列に挿入する．負荷を R で表し，出力ポートに接続する．外部から注入する信号は電流源としてソース端子に接続することとする．なお，現実の回路では DC 電源，DC ブロック，RF チョークなどの直流バイアス回路が必要となるが，本質的ではないので，この回路図では省略してある．この回路を図 5 に示した一般モデルの形式に書き換えると図 7(b) となる．更に，そこから FET を取り外すと，図 7(c) に示す 3 ポート受動網となる（各ポートの○記号はホット側，●記号はコールド側端子を示す）．

この回路の自走発振周波数 ω_0 と Q ファクタを求めよう．図 6 に示したフローチャートのステップ①から⑩に沿って計算を進めればよい．まず，この 3 ポート受動網のポートパラメータを求める．回路図からインピーダンス行列を導く方法は幾つかある [2] が，ここでは近道をしよう．回路図 7(c) をよく見るとポート #1 と #3 が直結されていることに気づく．これは #3 を無視して，#1 と #2 をもつ 2 ポート網のインピーダンス行列を計算するだけでよいということである．

ステップ①：この 2 ポート網は直列よりもシャントに結線されている素子を多く含むトポロジーなので，インピーダンス行列よりもアドミタンス行列からスタートの方が計算しやすい．回路網の並列分解の手法 [1], [2] により，この回路のアドミタンス行列は

$$\mathbf{Y}(\omega) = j\omega C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{R + j\omega L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

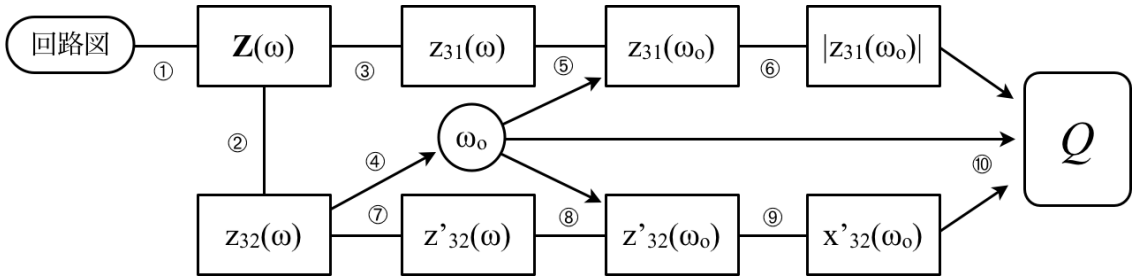


図 6 3ポート受動網の Q ファクタを求めるフローチャート
 与えられた回路図からインピーダンス行列が求まる。その行列の要素のうち、注入端子からゲート電極への結合インピーダンス $z_{31}(\omega)$ 、並びにドレイン電極からゲート電極への結合インピーダンス $z_{32}(\omega)$ が注入同期発振の特性を定める支配的役割を果たす。このフローで得られた Q ファクタの値をアドラーの式に代入することにより注入同期周波数範囲を見積もることができる。

Fig. 6 Flow chart to predict Q factor of three-port passive network.

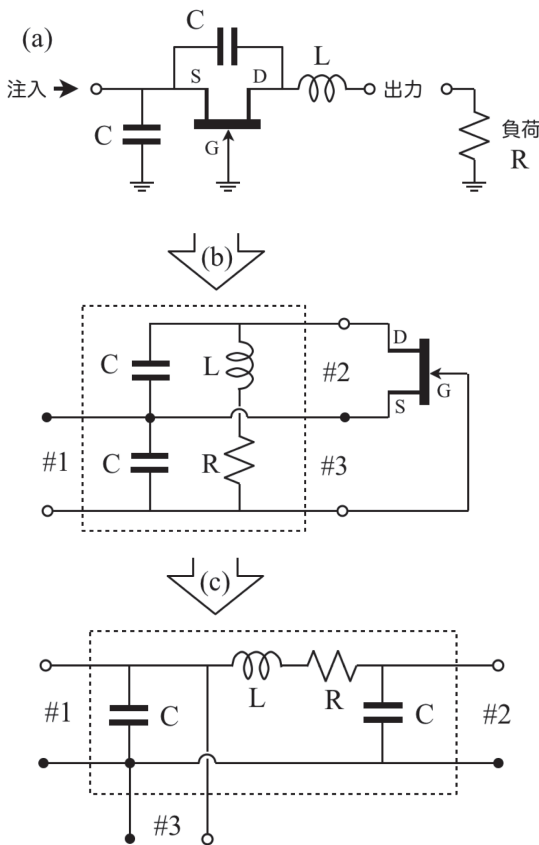


図 7 コルピッツ FET 発振回路
 (a) 原型, (b) FET と受動網に分離
 (c) 受動網を 3 ポートとして見やすく変形

Fig. 7 Colpitts FET oscillator.
 (a) original regime.
 (b) separate into FET and passive part.
 (c) redraw passive part for ease to find its three ports.

となる。インピーダンス行列はその逆行列なので

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\omega) &= \mathbf{Y}(\omega)^{-1} \\ &= (\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) \begin{bmatrix} j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 1 & -1 \\ -1 & j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 1 & 1 \\ 1 & j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 1 \end{bmatrix}}{j\omega C\{j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 2\}} \end{aligned} \quad (21)$$

と計算できる。

ステップ②③：ここで必要なポートパラメータは式 (16) と (19) で述べたとおり $z_{31}(\omega)$ と $z_{32}(\omega)$ である。図 7 (c) においてポート #1 と #3 が直結しているので、これらの電圧は常に同じ値であり、かつ、どちらのポートから電流を注入しても他のポートに与える影響は同一である。つまり

$$z_{31}(\omega) = z_{11}(\omega), z_{32}(\omega) = z_{12}(\omega)$$

である。式 (21) からこれら要素を取り出すと

$$\begin{aligned} z_{31}(\omega) &= z_{11}(\omega) \\ &= \frac{j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 1}{j\omega C\{j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 2\}} \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} z_{32}(\omega) &= z_{12}(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega C\{j\omega C(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}) + 2\}} \end{aligned} \quad (22b)$$

となる。これで受動網のポートパラメータが求まった。

ステップ④：式 (16) で述べたとおり自走発振周波数 ω_0 とは $z_{32}(\omega)$ が負の実数となる周波数である。この回路の場合、式 (22b) の分子が実数なので、分母が実

数となる周波数である。分母の虚部は $\omega C(-\omega^2 LC + 2)$ である。これをゼロにする周波数として

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad (23)$$

を得る。念のためこれを式 (22b) に代入してみると

$$r_{23}(\omega_0) = r_{12}(\omega_0) = z_{12}(\omega_0) = \frac{-L}{2CR} < 0$$

となり確かに負の実数となっている。これで自走発振周波数が決まったので、引き続き Q ファクタを計算する。

ステップ⑤⑥：式 (23) を (22a) に代入して

$$z_{31}(\omega_0) = \frac{L}{2CR} - j\sqrt{\frac{L}{2C}}$$

$$|z_{31}(\omega_0)| = \sqrt{\frac{L}{2C} \left(1 + \frac{L}{2CR^2}\right)} \quad (24)$$

となる。

ステップ⑦：式 (22b) を ω で微分して

$$z'_{32}(\omega) = \frac{2j - 2\omega CR - 3j\omega^2 LC}{\omega^2 C \{j\omega C(R + j\omega L) + 2\}^2}$$

となる。式がやや複雑に見えるが、 ω_0 の条件を用いることで見通しがよくなる。

ステップ⑧：上式に式 (23) を代入して分母分子を整頓すると

$$z'_{32}(\omega_0) = \frac{L}{CR} \left(\sqrt{\frac{LC}{2}} + j\frac{L}{R} \right)$$

となる。

ステップ⑨：上式の虚部を取り出すと

$$x'_{32}(\omega_0) = \frac{L^2}{CR^2} \quad (25)$$

となる。

ステップ⑩：ここまでで得られた式 (23)(24)(25) を Q ファクタ定義式 (19) に代入することにより最終的に

$$Q = \frac{\omega_0}{2} \frac{|x'_{32}(\omega_0)|}{|z_{31}(\omega_0)|}$$

$$= \frac{\omega_0 L}{R} \sqrt{\frac{L}{L + 2CR^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2L}}{R\sqrt{LC + 2C^2R^2}}$$

を得る。これがコルピッツ注入同期発振回路の Q ファクタである。ここで特に抵抗 R が十分小さい場合は R^2 の項が無視できるので、上式は簡単化され、よく知られた Q ファクタ公式

$$Q \approx \frac{\omega_0 L}{R} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

に到達できることがわかる。

4. む す び

注入同期動作を説明する最も近い道を示した。回路内の信号の基本波成分だけに着眼し、それを複素変数として構成要素の機能を記述することにより特性方程式を導いた。この特性方程式は自走発振周波数を決定するのみならず注入同期状態での信号位相差も決定する。特性方程式が解をもつ条件から同期帯域幅が求まる。注入同期しやすさの指標として Q ファクタを定義した。同期帯域幅は注入振幅に比例し Q ファクタに反比例する。ここで導出した Q ファクタの式を用いることにより、回路図 \Rightarrow ポートパラメータ $\Rightarrow Q$ ファクタ $\Rightarrow \Delta\omega$ という手順で同期範囲を見積もることが可能となった。本論文で述べた手法は SPICE などの時間領域シミュレーションに比べて格段に見通しが良くかつエレガントである。高専・大学等の教育現場での例題演習としてはもちろんのこと、企業や研究機関における回路開発現場での基礎検討過程においても活用が期待できる。

文 献

- [1] 大平 孝, “発振回路の基礎: NINO の概念とインポート行列法,” アジア太平洋マイクロ波会議, APMC2010, 基礎講座テキスト, pp.53–58, Dec. 2010.
- [2] 大平 孝, “行列ができる回路演習: アナログ回路を紙と鉛筆で考えよう [I] アナログ回路のポートパラメータ,” 信学誌, vol.93, no.1, pp.67–72, Jan. 2010.
- [3] R. Adler, “A study of locking phenomena in oscillators,” Proc. IRE, vol.34, pp.351–357, June 1946.
- [4] T. Ohira, “Extended Adler’s injection locked Q factor formula for general one- and two-port active device oscillators,” IEICE Electronics Express, vol.7, no.19, pp.1486–1492, Oct. 2010.
- [5] T. Ohira and T. Wuren, “Pseudolinear circuit theory for sinusoidal oscillator performance maximization (invited),” IEICE Trans. Electron., vol.E91-C, no.11, pp.1726–1737, Nov. 2008.

(平成 25 年 7 月 20 日受付, 11 月 13 日公開)



大平 孝 (正員)

1983 阪大博士課程了. NTT にて衛星搭載 GaAsMMIC/トランスポンダの設計を担当. ATR にてエスバアンテナの研究に従事. 2005 ATR 波動工学研究所長. 現在, 豊橋技術科学大学教授. 共著「モノリシックマイクロ波集積回路」. 1986 本会篠原記念学術奨励賞. 1998 APMC Japan Microwave Prize. 2004 本会エレクトロニクスソサイエティ賞. 2012 CEATEC 準グランプリ. 2013 日経エレクトロニクス読者賞. IEEE MTT-S Kansai Chapter Founder. IEEE MTT-S Nagoya Chapter Founder. IEEE Fellow. 工博.