アレーアンテナとガロア理論

宮下　裕章†a)

Antenna Arrays and Galois Theory

Hiroaki MIYASHITA†a)

あらまし　シェルクノフはリニアアレーを多項式と捉え，サブアレーを素子アンテナとみなしアレーアンテナの指向性合成を論ずるアレー原理 (arrays of arrays principle) を定式化した．アレー原理は多くの応用を生んだが，根本原理の数学的分析が十分であるかについては疑問が残る．本論文では，一般的な見地からリニアアレーを数学の対象物として再定式化する．リニアアレーのアレーファクタは代数曲線上の関数と考えるのが自然であり，アレーファクタの積による分解はガロア被覆塔に対応する．塔の構造は整数の加法群から得られる射影系に一対一に対応し，最長の被覆塔はアレーアンテナの素子数を法とする整数加法群の組成列から得られる．素子数が無限の場合はエタール基本群を絶対ガロア群とした扱いができ，ガロア被覆塔から生じる全てのアレー原理を含む絶対アレー原理が定式化される．

キーワード　アレーファクタ，ガロア被覆，代数曲線，エタール基本群，ポントリャーギン双対性

1. まえがき

シェルクノフ [1] はリニアアレーを多項式と捉え，サブアレーを素子アンテナとみなしアレーアンテナの指向性合成を論ずるアレー原理 (arrays of arrays principle) を定式化した．サブアレーファクタを全体のアレーファクタから積の形でくくり出せば素子パターンとなり，残りが新たなアレーファクタとして動作するというものである．リニアアレーに対応する多項式はシェルクノフ多項式と呼ばれ，アレー放射パターンの零点はシェルクノフ単位円と呼ばれる複素平面内の単位円上の零点に対応する．アレーファクタを多項式で表した場合，自然な積への分解は代数学の基本定理を用いた複素一次多項式の積による表現で，これは既にシェルクノフが指摘している．しかしながら，当該分解はアレー原理を直接生ずる形とはなっていない．シェルクノフ多項式をベースとして，仮にアレーファクタが解析的に閉じた形で総和できれば，アレー原理の理解の助けにはなる．等間隔一様励振アレー (ULA: Uniform Linear Array) のアレーファクタが幾何級数として総和できることはよく知られているが，Cheng ら [2] は Z 変換を用いることで，より広いクラスのアレーファクタが解析的に閉じた形に総和できることを示した．これに派生する研究として [3]～[9] などがある．一方，アレーファクタが積に分解する場合の給電回路の構成法の検討も重要である．その方面では，アレー指向性零点を独立に走査できるデイビス給電回路 [10] が著名であり，関連する研究として [11] なども知られている．これらは個々の結果としては興味深く工学的意義があるが，シェルクノフ多項式の応用例の位置付けである．指導原理であるアレー原理の詳細な分析を手始めに，本質的な意味でのシェルクノフ多項式の議論が望まれる．

アレー原理はシェルクノフ多項式の何らかの対称性を反映しているはずである．その表現手段としてまず思いつくのは，代数方程式のガロア理論であろう．ガロア理論は素朴には代数方程式の根の置換に関するもので，方程式の係数に秘められた対称性をガロア群が記述する．ULA の場合，根は全てシェルクノフ単位円上にあり，物理現象としてアレーアンテナの零点の対称性として現れ，実際に観測することができる．任意の励振分布を有するアレーアンテナへアレー原理が適用できるのも明らかである．しかしながら，アレー励振係数が変化すれば零点は複素平面の一般の位置へ

† 三菱電機株式会社，鎌倉市
Information Technology R&D Center, Mitsubishi Electric Corporation, 5–1–1 Ofuna, Kamakura-shi, 247–8501 Japan
a) E-mail: Miyashita.Hiroaki@ab.MitsubishiElectric.co.jp

移動してしまい，シェルクノフ単位円上の観測可能な零点のみをもって対称性を論ずるのは不完全と想像される．更に複素平面上の他の零点の物理的意味も明確でない．ガロア群は方程式の係数がほんの少し変化するだけで，全く異なるものになってしまうことが多い．ところが，アレー励振係数に少々の誤差が生じてもアレー原理がそこまで敏感に反応するかというと，直感や経験には反しており，素朴なガロア理論の適用は行き詰まってしまうように思われる．その枠を一つ超えるための方策としては，シェルクノフ単位円上の観測点を連続的に移動させてもアレー周期に対応するアレー原理の対称性は保たれる点に注目することが考えられる．素朴なガロア理論では方程式の係数を固定したままで離散的な根を見ていたが，新たに変数を一つ追加した代数関数を用いれば，観測点の連続変化へも対応できる．数学としては代数関数論，いわゆるリーマン面の理論の適用が可能となる．ガロア理論はコンパクトリーマン面と代数関数体のガロア対応を記述する理論として拡張されている．コンパクトリーマン面としてシェルクノフ単位円を含む複素平面に無限遠点を付け加えたリーマン球を採用すれば，そのガロア対応は有理関数体となる．アレー原理はアレーファクタの分割数に対応したリーマン球の間の被覆写像に関連し，その写像度としての位相不変量である被覆次数がそれぞれのサブアレーの特徴量となる．アレー原理は被覆次数の列に相当する加法群列の包含関係で記述，分類されることが見出される．これがアレー原理における対称性の本質で，任意励振分布アレーの分解は，ULA を ULA の範囲で分解することと同じとなる．続く問題はより数学的な扱いが困難な無限アレーの場合だが，代数幾何学の手法が効果的に活用できる．アレーファクタの分解は幾何学的にはシェルクノフ多項式を既約な代数曲線に分解していく操作に対応している．無限アレーに相当する無限個の代数曲線を同時に扱うことは一見複雑な方向に向かっているように思われるが，アレー原理の対称性からガロア理論が生む結果はむしろ簡潔である．無限個の代数曲線を統制する絶対ガロア群はエタール基本群と呼ばれるが，アレー原理の場合，それは整数加法群の副有限完備化 $\hat{\mathbb{Z}}$ に一致することとなる．読者が類体論を御存知であれば，$\hat{\mathbb{Z}}$ は数学の中でも最も美しく基本的な量の一つと賛同されるかもしれない．それはアレー原理とも無関係ではないのである．

本論文では，リニアアレーを多項式と捉えるシェルクノフの精神を尊重しつつ，アレーアンテナを数学の対象物として分析する．特にアレー原理の根源について考察する．**2.** は導入の位置付けであり，アレー原理を概観するとともに，アレーファクタの積への分解と対応する給電系の構成の関係を整理する．**3.** が本論であり，任意励振分布を有するリニアアレーのアレー原理を被覆空間のガロア理論を用いて再定式化する．リニアアレーを代数曲線上の関数とみなせばガロア被覆の理論が自然に適用される．アレーファクタの積による分解はガロア被覆塔に対応している．塔の構造は整数加法群から得られる射影系に一対一に対応し，最長の被覆塔はアレーアンテナの素子数を法とする整数加法群の組成列から得られることが示される．更に素子数無限の場合に理論を拡張するために代数幾何学の手法を用い，エタール基本群を絶対ガロア群とした無限次元のガロア被覆塔を導入する．これにより，ガロア被覆塔から生ずる全てのアレー原理を含む絶対アレー原理が定式化される．**4.** ではアーベル群の双対性をベースとした純代数的定式化からも **3.** の主要結果が再現されることを指摘し，高次元アレーへの拡張の手掛り示す．

なお，**3.** 以降では，少なくとも数学科学士程度の素養を仮定しており，かつ，紙面の制限から用語の定義や既存の定理の説明を十分にはなし得なかった．工学系読者の便宜のため，付録に関連する数学の文献案内を入れたので，適宜，活用を頂きたい．また，本文中に名称と参考文献を示した定理や関連する一般論は全て著名なものであり，筆者の数学への寄与はないことをお断りしておく．

2. アレー原理

2.1 アレーファクタの分解

P 素子共相励振リニアアレーのアレーファクタは，ブローサイドからの角度方向を θ，ビーム走査角度方向を θ_0，波長を λ として以下で与えられる [1].

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{P-1}x^{P-1} \quad (1)$$

$$x = e^{2\pi ju} \quad (2)$$

$$u = \frac{d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0) \quad (3)$$

上式で a_m は m 番目の素子の励振係数，その素子位置は md である．

以後，最も基本的と思われる ULA を例にして，シェルクノフのアレー原理を概観する．アレーファクタは

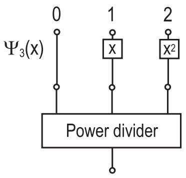

図 1　$\Psi_3(x)$ に対応する給電系
Fig. 1　Feeding network for $\Psi_3(x)$.

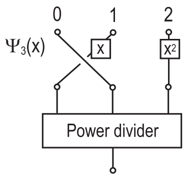

図 2　$\Psi_3(x)$ に対応する給電系
Fig. 2　Feeding network for $\Psi_3(x)$.

幾何級数 $\Psi_P(x)$ を用いて次式となる．

$$\begin{aligned}\Psi_P(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{P-1} \\ &= \frac{x^P - 1}{x - 1} \qquad (4)\end{aligned}$$

重複を許した素数 p_i の積で $P = p_1p_2\cdots p_n$ と表す．そのとき，以下の幾何級数の積への分解が得られる．

$$\begin{aligned}\Psi_P(x) &= \Psi_{p_1}(x)\Psi_{p_2}(x^{p_1})\Psi_{p_3}(x^{p_1p_2}) \\ &\quad \cdots \Psi_{p_n}(x^{p_1p_2\cdots p_{n-1}}) \qquad (5)\end{aligned}$$

これは，次式から確かめられる．

$$\begin{aligned}\Phi_P(x) &= \frac{x^{p_1p_2\cdots p_n} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^{p_1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{p_1p_2} - 1}{x^{p_1} - 1} \cdot \frac{x^{p_1p_2p_3} - 1}{x^{p_1p_2} - 1} \\ &\quad \cdots \cdot \frac{x^{p_1p_2\cdots p_n} - 1}{x^{p_1p_2\cdots p_{n-1}} - 1} \\ &= \Psi_{p_1}(x)\Psi_{p_2}(x^{p_1})\Psi_{p_3}(x^{p_1p_2}) \\ &\quad \cdots \Psi_{p_n}(x^{p_1p_2\cdots p_{n-1}})\end{aligned}$$

2. 2　アレーファクタの分解と給電系

アレーファクタの分解と給電系の関係を整理しておく．まず理解を容易にするため，簡単な例を用いて説明を行う．一般の ULA への拡張は容易である．

$\Psi_3(x) = 1 + x + x^2$ に対応する給電系を図 1 と考えるのは自然である．ただし，x は式 (2) で与えられる．図中，上部の数字 $0, 1, 2$ は素子が接続されるポート番号で，それぞれ $\Psi_3(x)$ の初項，第 2 項，第 3 項に対応する．また，電力分配器で信号は等振幅，等位相に分配され，他の給電線路は全て同一であるとする．この場合，$\boxed{x}$, $\boxed{x^2}$ の部分は，それぞれ，ビーム走査位相 $-kd\sin\theta_0$，$-2kd\sin\theta_0$ を与える位相器に対応すると解釈できる．ただし，$k = 2\pi/\lambda$ である．なお，ポート 0 の部分はビーム走査位相 0 に対応すると考えることもできる．ところで，多項式の加法に関する可換性により，例えば $1 + x + x^2 = x + 1 + x^2$ が成り立ち，

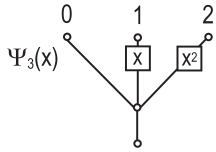

図 3　$\Psi_3(x)$ に対応する給電系の図法
Fig. 3　Diagram of feeding network for $\Psi_3(x)$.

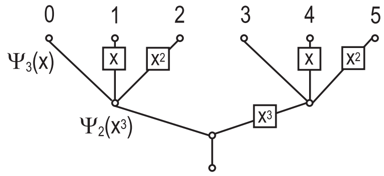

図 4　$\Psi_3(x)\Psi_2(x^3)$ に対応する給電系
Fig. 4　Feeding network for $\Psi_3(x)\Psi_2(x^3)$.

左辺は図 1，右辺は図 2 に対応するが，物理的には両者は同じである．よって，加法順序の置換に関しては給電系を区別する必要はない．この例の場合，3! 通りの当該置換対称性が存在するが，これらを区別しないとすると図 3 の図法を得る．これを以後採用することとする．$\boxed{x}$, $\boxed{x^2}$ の部分を取った図形を離散数学ではトリー（閉路を含まない連結グラフ）と呼ぶのが一般的である [13]．本論文では，任意励振分布アレーの共相励振を視野に入れ，便宜上トリーの定義を以下とする．

[本論文におけるトリーの定義]　等位相分配器，及び $\boxed{x^n}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の部分にビーム走査位相 $-nkd\sin\theta_0$ 与える移相器を備えた給電系で閉路を含まないもの．　□

続いて，アレーファクタの積と給電系の関係を見る．給電系の図はアレーファクタの積の左側から右側の順に対応して，上から下に書いていくこととする．例えば，$\Psi_3(x)\Psi_2(x^3) = (1 + x + x^2)(1 + x^3)$ は図 4 となる．$\Psi_2(x^3)\Psi_3(x) = (1 + x^3)(1 + x + x^2)$ に対する給電系は図 5 となり，積の順序が異なると得られる給電系の図形は異なる．なお，$(1 + x^3)(1 + x + x^2) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \Psi_6(x)$ のように積を展

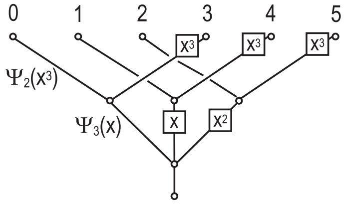

図 5　$\Psi_2(x^3)\Psi_3(x)$ に対応する給電系
Fig. 5　Feeding network for $\Psi_2(x^3)\Psi_3(x)$.

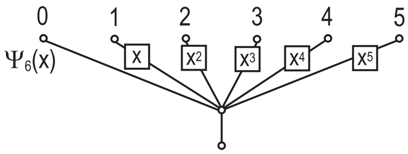

図 6　$\Psi_6(x)$ に対応する給電系
Fig. 6　Feeding network for $\Psi_6(x)$.

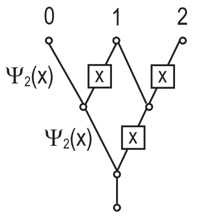

図 7　$\{\Psi_2(x)\}^2$ に対応する給電系
Fig. 7　Feeding network for $\{\Psi_2(x)\}^2$.

開した給電系は図 6 に対応すべきであり，この場合，展開後に積の順序は関係なくなる．以上の約束により，アレーファクタの積から給電系の図への対応は写像として矛盾なく定義される．

以上はトリーの例であったが，一般にはアレーファクタの積に対応する給電系はトリーとはならない．例えば，$\{\Psi_2(x)\}^2 = (1+x)^2$ の給電系は図 7 となる．この場合，給電系には閉路が存在している．アレー原理を適用する場合は，$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$ と展開し，トリーの形の給電系を得ることが必要である．

簡単な例を与えておく．図 8 が 6 素子等間隔 ULA のトリーである．なお，図を見やすくするためにアレー給電ポートからポート 0 に至る分配回路を実線，他の部分を破線で書いている．このトリーは次式の各行の分解に対応している．ただし，{ }の中の幾何級数積は展開したものと考える．

$$\begin{aligned}\Psi_6(x) &= \Psi_2(x)\Psi_3(x^2) = \Psi_3(x^2)\Psi_2(x)\\ &= \Psi_3(x)\Psi_2(x^3) = \Psi_2(x^3)\Psi_3(x)\\ &= \{\Psi_2(x)\Psi_3(x^2)\}\end{aligned}$$

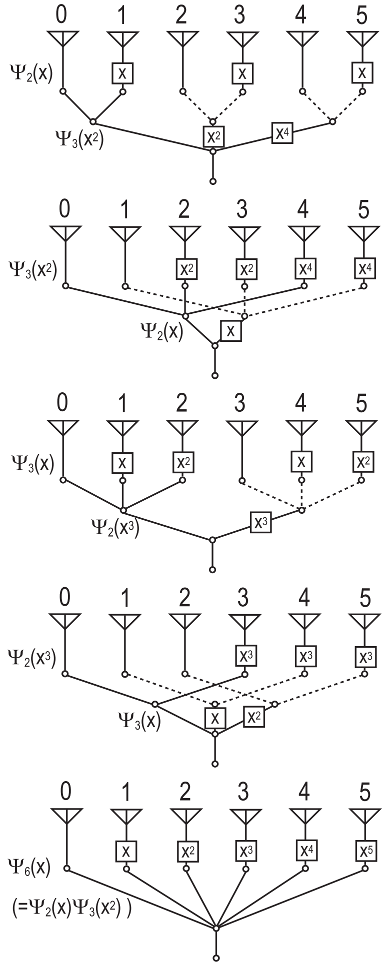

図 8　$\Psi_6(x) = \Psi_{2\cdot3}(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ の分解
Fig. 8　Factorizations of $\Psi_6(x) = \Psi_{2\cdot3}(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$.

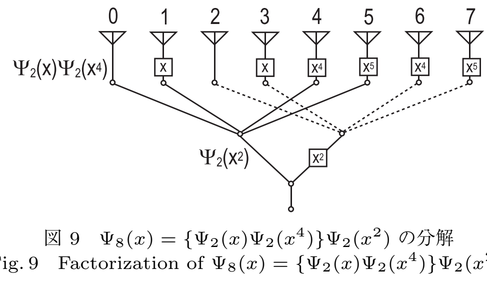

図 9　$\Psi_8(x) = \{\Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\}\Psi_2(x^2)$ の分解
Fig. 9　Factorization of $\Psi_8(x) = \{\Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\}\Psi_2(x^2)$.

上の例はアレーファクタが二つの積に分解する単純な場合だが，一般的には式 (5) の積のうち複数のサブアレーファクタを展開し，更に順序を並べ換える自由度がある．これをアレーファクタの部分積と呼ぶ

こととし，上式と同様，展開するサブアレーファクタを{ }で表す．例えば，8 素子 ULA に対応する式 (5) は $\Psi_8(x) = \Psi_2(x)\Psi_2(x^2)\Psi_2(x^4)$ だが，部分積として $\Psi_8(x) = \{\Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\}\Psi_2(x^2)$ などが取れる．これに対応する給電形のトリーを図 9 に示しておく．

3. リニアアレーとガロア被覆

本章では，アレー原理を被覆空間のガロア理論を用いて再定式化する．数学用語は標準的と思われるものを用いたが，正確な定義は適宜，付録の文献を参照頂きたい．まず，全体の基礎となる被覆空間の定義及びそのガロア理論の基本定理を次節に整理しておく．

3.1 被覆空間のガロア理論

[被覆空間の定義] [14]〜[16]　Y，X を位相空間，$h : Y \to X$ を連続な上への写像とする．次の条件が成り立つとき，Y を X の被覆空間，h を被覆写像，X を底空間という．

全ての $x \in X$ に対して x のある開近傍 $U \subset X$ が存在して，逆像 $h^{-1}(U)$ が互いに交わりのない Y の開集合の族 $\{V_m\}_{m\in M}$ で以下のように表される．

$$h^{-1}(U) = \bigcup_{m\in M} V_m$$

かつ，全ての m に対して h の V_m への制限 $h|V_m \to U$ は同相写像である．　□

続いて，被覆空間のガロア理論を概観する．

二つの被覆 $h : Y \to X$，$h' : Y \to X$ に対してある同相写像 $\Phi : Y \to Y$ が存在して $h = h' \circ \Phi$ となるとき，Φ を h から h' への同型といい，$h \cong h'$ と書く．その同値類を被覆の同型類と呼ぶ．特に $h = h'$ の場合，Φ を被覆変換という．被覆変換の全体の集合は写像の合成に関して群をなし，被覆変換群若しくは体のガロア理論からの類推でガロア群と呼ばれる．以後 Y は連結であると仮定する．被覆変換がファイバ $h^{-1}(x), x \in X$ に推移的に作用する場合，被覆 $h : Y \to X$ をガロア被覆と呼び，そのガロア群を $\mathrm{Gal}(Y/X)$ と表す．$\pi_1(\Omega, x)$ を位相空間 $\Omega(\ni x)$ の x を基点とする基本群とすれば，位相空間の間の連続写像 $f : A \to B$，$a \mapsto f(a) = b$ に対して基本群間の写像 $f_\# : \pi_1(A, a) \to \pi_1(B, b)$ が誘導される．基点を指定しない場合は $f_\# : \pi_1(A) \to \pi_1(B)$ と書く．$h : Y \to X$ をガロア被覆とすれば，ガロア群がファイバに推移的に作用することから $h_\#(\pi_1(Y))$ は $\pi_1(X)$ の正規部分群になり，剰余群 $\pi_1(X)/h_\#(\pi_1(Y))$ が定義される．一般に群 G の部分群 K と G の元 g に対し，$K^g = \{g^{-1}kg | \ k \in K\}$ は G における K と共役な部分群をなす．この共役による群 G の同値関係において K の同値類を K の共役類といい，(K) と書くことにする．また，位相空間に群 G が作用するとし，その軌道による商空間を X/G を記す．次の定理が知られている．

[ガロア被覆の基本定理] [14]〜[16]　$h : Y \to X$ をガロア被覆とすれば以下が成り立つ．

- ガロア被覆の同型類には $\pi_1(X)$ の部分群の共役類との全単写対応がある．すなわち，$\pi_1(X, x)$ の各部分群 K に対して，ある基点 $y_K \in h_K^{-1}(x)$ をもつ連結な被覆 $h_K : Y_K \to X$ があって，$\pi_1(Y_K, y_K)$ の $\pi_1(X, x)$ における像が K となる（全写性）．更に $(K) = (L)$ ならば $h_K \cong h_L$ である（単写性）．
- L が K を含む $\pi_1(X, x)$ の部分群であるとき，y_K を y_L に写し X への射影と両立する被覆写像 $h_{K,L} : Y_K \to Y_L$ が一意的に存在する．K が L の正規部分群であるときガロア被覆が得られ，$\mathrm{Gal}(Y_K/Y_L) = L/K$ となる．特に $\mathrm{Gal}(Y/X) = \pi_1(X)/h_\#(\pi_1(Y))$ である．
- 位相空間の同型 $Y_L \cong Y_K/\,\mathrm{Gal}(Y_K/Y_L)$ も成り立つ．特に $X \cong Y/\,\mathrm{Gal}(Y/X)$ である．

□

続いて，普遍被覆について述べておく．被覆 $p : \tilde{X} \to X$ において $\tilde{X}$ が単連結 $\pi_1(\tilde{X}) \cong e$（e は単位群）かつ局所弧状連結の場合，$\tilde{X}$ を X の普遍被覆（空間）という．普遍被覆は次の普遍性を有する．X の任意の被覆 $h : Y \to X$ に対して被覆写像 $q : \tilde{X} \to Y$ が存在して $p = h \circ q$ が成り立つ．普遍被覆は同型を除いて一意的である．このとき，ガロア被覆の基本定理より以下が成り立つ．

$$\mathrm{Gal}(\tilde{X}/X) = \pi_1(X)$$
$$X \cong \tilde{X}/\,\mathrm{Gal}(\tilde{X}/X) = \tilde{X}/\,\pi_1(X)$$

以後，$\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}$ をそれぞれ複素数，実数，整数，自然数の集合とし，代数的，解析的構造などを有するときは適宜対応物に同定する．

3.2 アレー原理と被覆空間

アレーファクタに対してサブアレーを区別する添字を m として，K 素子のサブアレーファクタを次式で与えることにする．ただし便宜上，今後，式 (2) の x は z と記すこととする．

$$F_K^{(m)}(z) = a_0^{(m)} + a_1^{(m)} z + \cdots + a_{K-1}^{(m)} z^{K-1} \quad (6)$$

なお，$a_i^{(m)} \in \mathbb{C}$, $(0 \leq i \leq K-1)$ である．本論文で P 素子のアレーファクタ $F_P(z)$ が積に分解するとは，式 (5) と同様な以下の形の場合とする．

$$F_P(z) = F_{p_1}^{(1)}(z) F_{p_2}^{(2)}(z^{p_1}) \cdots F_{p_n}^{(n)}(z^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}) \tag{7}$$

$\mathbb{C}$ から原点を除いた集合を $\mathbb{C}^*$ とする．更に $n \in \mathbb{Z}$ とし，$h_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$; $z \mapsto z^n$ と定義すれば，次の被覆写像の塔が得られる．

$$z \xrightarrow{h_{p_1}} z^{p_1} \xrightarrow{h_{p_2}} z^{p_1 p_2} \xrightarrow{h_{p_3}} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{h_{p_{n-1}}} z^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} \tag{8}$$

これは式 (7) の分解に対応し，アレー原理は被覆空間の塔上で考察できる．

3.3 アレー原理と代数関数

体 K が L 上超越次数が 1 の有限生成拡大で L は K の中で代数的に閉じているとき，体の拡大 K/L を L を定数体とする代数関数体，その元を代数関数という．例えば，x を超越元，$a_i(x) \in \mathbb{C}(x) = L$, $(0 \leq i \leq n-1)$ として y が以下の既約な関係式を満たすとする．

$$a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{n-1}(x)y^{n-1} + y^n = 0 \tag{9}$$

ここで $\mathbb{C}$ 上において式 (9) の x と y で生成される体 $K = \mathbb{C}(x,y)$ を取れば，K は $\mathbb{C}(x) = L$ 上 y で生成される（n 次の）代数拡大，すなわち代数関数体となる．代数関数が定める曲面（アフィン代数多様体，代数曲線）は代数曲線のリーマン面と呼ばれ，アンテナ関係者にも馴染み深い対象である．

被覆空間の塔 (8) と代数関数の関係を論ずる．塔 (8) の m 番目の被覆の部分は $x = z^{p_1 p_2 \cdots p_m}$，$y = z^{p_1 p_2 \cdots p_{m-1}} \in \mathbb{C}^*$ と置いて，代数関数 $x - y^{p_m} = 0$ を与えている．代数拡大 $\mathbb{C}(y,x)/\mathbb{C}(x)$ において，$\mathbb{C}(y,x) = \mathbb{C}(x)[x^{1/p_m}] \cong \mathbb{C}(x)[y]/(y^{p_m} - x) \cong \mathbb{C}(y)$ が成り立つので，$\mathbb{C}(y,x) = \mathbb{C}(y)$ とも書く．塔 (8) に対応して $\mathbb{C}(x)$ も同じ意味とする．上記 m 番目の被覆の被覆空間を $Y(\cong \mathbb{C}^*)$，底空間を $X(\cong \mathbb{C}^*)$ と書けば $h_{p_m} : Y \to X$ はガロア被覆であり，それぞれの空間の基本群は $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$，$\pi_1(Y) = \mathbb{Z}$ である．添字 # を誘導される写像の意味として．$h_{p_m\#}(\pi_1(Y)) = p_m\mathbb{Z}$ より，被覆変換のガロア群 $\mathrm{Gal}(Y/X)$ は以下となる．

$$\mathrm{Gal}(Y/X) = \pi_1(X)/h_{p_m\#}(\pi_1(Y)) = \mathbb{Z}/p_m\mathbb{Z}$$

今後，1 の m 乗根を $\zeta_m = \exp(2\pi j/m)$ と記す．$x - y^{p_m} = 0$ の全ての解は $y = \zeta_{p_m}^n \cdot x^{1/p_m}$，$(0 \leq n < p_m)$ となり，代数拡大 $\mathbb{C}(y)/\mathbb{C}(x)$ は体の拡大に関する通常の意味でのガロア拡大となる．なぜなら，$\mathbb{C}(y) = \mathbb{C}(x)[x^{1/p_m}]$ 及び $\zeta_{p_m}^n \in \mathbb{C}(x)$ であり，$\zeta_{p_m}^n : \mathbb{C}(y) \to \mathbb{C}(y)$, $x^{1/p_m} \mapsto \zeta_{p_m}^n \cdot x^{1/p_m}$ が体の同型写像になるからである．そのガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(y)/\mathbb{C}(x))$ は巡回群 $\mathbb{Z}/p_m\mathbb{Z}$ に同型である．また，X，Y 及びそれらが定める代数曲線には自然に複素多様体としての解析的構造が入り，リーマンの特異点除去定理を用いて分岐点まで含めて被覆写像 h_{p_m} を解析的写像に拡張することができる．この場合，X，Y はそれぞれリーマン球に同相，Y の（解析的）自己同型写像を ϕ とすれば $h_{p_m} = h_{p_m} \circ \phi$ が成り立つ．ϕ は解析的な意味でのガロア群 $\mathrm{Gal}_{\mathrm{anal}}(Y/X)$ を定めることになり，コンパクトリーマン面のガロア理論が確立される．代数関数のリーマン面には代数関数体がガロア対応の意味で対応するが，リーマン球の場合，その上で定義された代数関数は有理関数体となり，ローラン級数体に同型となる．また，被覆空間と見ても分岐点（この場合は，原点と無限遠点）を $\mathbb{C}^*$ に付け加えて位相空間をコンパクト化し，$\mathrm{Gal}(Y/X)$ を同様に自然に拡張することができ，分岐被覆のガロア理論と呼ばれる．なお，コンパクト化前の $\mathbb{C}^*$ に対応する被覆は不分岐被覆と呼ばれる．次の同型が知られている．

$$\mathrm{Gal}(Y/X) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(y,x)/\mathbb{C}(x)) \cong \mathrm{Gal}_{\mathrm{anal}}(Y/X) \tag{10}$$

上で特に代数的な量と解析的な量が同型になる性質は原論文の頭文字を取って GAGA と広く呼ばれる [18]．式 (10) は位相的（被覆空間），代数的（代数拡大），解析的（複素多様体）に定義されたガロア群が全て同型になることを主張する．これより，ガロア被覆を論ずる場合，都合に応じてどのガロア群を用いて議論を進めてもよいことになるので，今後，考察の舞台にかかわらず自由にガロア群という言葉を用いることにする．

次に，被覆の塔 (8) とアレーファクタの積への分解式 (7) の幾何学的意味についても述べておく．一般に x，y の多項式が既約な代数関数に分解する場合，既約成分ごとに連結な曲面（アフィン代数多様体）を定めることが知られている．n を任意の自然数，更に $x \in \mathbb{C}(x)$，$y \in \mathbb{C}(y,x)$ とすると $x - y^n = 0$ は既約である．式 (7) に現れる各々の項は $y = z^{p_1 p_2 \cdots p_{m-1}}$，$x = z^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}$ と置けば，被覆

$h_{p_m p_{m+1}\cdots p_{n-1}}: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $y \mapsto x$ に対する $F^{(n)}_{p_n}(x)$ を底空間上の関数とする被覆空間上の関数 $F^{(m)}_{p_m}(y)$ となっている．つまり塔 (8) は各々交わりのない既約な被覆空間の間に更に被覆写像の塔を与えていることに相当する．

3.4 計算例と物理解釈

前節までの一般論に対して具体的な計算例を示すとともに，物理解釈をつける．簡単のため，被覆と対応する代数拡大体，及び，体 K のガロア対である固定部分群 $\mathrm{Gal}(K)$ として以下の塔を考察する．

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}(x) & \supset & \mathbb{C}(x^l) & \supset & \mathbb{C}(x^{lm}) \\ \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x)) & \subset & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^l)) & \subset & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^{lm})) \\ \| & & \| & & \| \\ 0 & & \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/(lm\mathbb{Z}) \end{array} \quad (11)$$

例えば，$g_p = p \in \mathbb{Z}/(lm\mathbb{Z}) = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^{lm}))$ の x への作用は $g_p:\ x \mapsto x\zeta^p_{lm}$ となり，それぞれの体は次式のように変換される．

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}(x^{lm}); & g_p:\ x^{lm} \mapsto (x\zeta^p_{lm})^{lm} = x^{lm} \\ \mathbb{C}(x^l); & g_p:\ x^l \mapsto (x\zeta^p_{lm})^l = x^l\zeta^p_m \\ \mathbb{C}(x); & g_p:\ x \mapsto x\zeta^p_{lm} \end{array} \quad (12)$$

これより拡大 $\mathbb{C}(x^l)/\mathbb{C}(x^{lm})$ のガロア群は次のように計算される．

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^l)/\mathbb{C}(x^{lm})) &= \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^{lm}))/\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^l)), \\ &= \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{aligned} \quad (13)$$

$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^l)/\mathbb{C}(x^{lm}))$ は拡大体 $\mathbb{C}(x^l)/\mathbb{C}(x^{lm})$ の $\mathbb{C}(x^{lm})$ を固定体とする同型写像となるが，具体的作用は $g_q = q \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ として $g_q:\ x^l \mapsto x^l\zeta^q_m$ となる．これより $g_q:\ x^{lm} \mapsto (x^l\zeta^q_m)^m = x^{lm}$ なので，確かに $\mathbb{C}(x^{lm})$ は固定体になっている．他のガロア群の作用も同様に計算される．上の例では，被覆の塔 $\mathbb{C}^* \xrightarrow{h_l} \mathbb{C}^* \xrightarrow{h_m} \mathbb{C}^*$ を考えたが，$h_{lm} = h_m \circ h_l$ であり，以下もガロア拡大となる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(x) & \supset & \mathbb{C}(x^{lm}) \\ \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x)) & \subset & \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x^{lm})) \\ \| & & \| \\ 0 & & \mathbb{Z}/(lm\mathbb{Z}) \end{array} \quad (14)$$

拡大体 $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^{lm})$ のガロア群は次式となる．

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^{lm})) = \mathbb{Z}/(lm\mathbb{Z}) \quad (15)$$

続いて，ガロア群の幾何学的意味を見る．上の例から明らかなようにガロア群は $\mathbb{C}^*$ の元の原点を中心とする回転として作用する．例えば，$k \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^{lm})) = \mathbb{Z}/(lm\mathbb{Z})$ は，$\mathbb{C}(x^{lm})$ に対応する $\mathbb{C}^*$ の元を固定しつつ $\mathbb{C}(x^{lm})$ に対応する $\mathbb{C}^*$ の元に対して ζ^k_{lm} の回転を与える．$klm = 0 \bmod lm$ なので，lm 回 k を作用させれば元に戻る．その間，常に固定体 $\mathbb{C}(x^{lm})$ に対応する $\mathbb{C}^*$ 上の関数の値は不変である．

以上の考察をアレーアンテナに適用してみる．積に分解するアレーファクタは被覆空間の塔上の関数であった．よって，ガロア群は底空間上の関数であるアレーファクタを不変にしつつ，被覆空間上の関数のアレーファクタを変換している．式 (7) の記法を採用すれば，例えば，

$$F_P(z) = F^{(1)}_{p_1}(x)F^{(2)}_{p_2}(x^{lm}) \quad (16)$$

と分解するなら，ガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^{lm}))$ は $F^{(2)}_{p_2}(x^{lm})$ の値を常に変えずに $k:\ F^{(1)}_{p_1}(x) \mapsto F^{(1)}_{p_1}(x\zeta^k_{lm})$ と作用する．ガロア群の作用は物理的にはアンテナ観測方向（u 空間）の変化に対応している．アレーアンテナがボアサイト方向に主ビームをもつとし，はじめは主ビーム方向から電波を入射させ，続いてガロア群に対応する方向から入射させたとする．$k: x \mapsto x\zeta^k_{lm}$ が $F^{(2)}_{p_2}(x^{lm})$ を不変に保つという意味は，後者がグレーティンググローブ方向からの入射という単純な事実に対応している．一般の入射角に対しても上記グレーティンブローブ分離れた方向のレベルが同じということであり，観測角を連続的に変化させても当該対称性を有するのは，まさにアレーファクタが被覆空間上の関数だからである．

3.5 アレー原理とガロア被覆塔

これまで代数関数としてのアレーアンテナを考察したが，物理的にはシェルクノフ単位円 S^1 上を動くユニバーサルパラメータ u でアレーの応答は決まる．幸い $\mathbb{C}^*$ と S^1 はホモトピー同値であり，位相幾何学的な性質は同一となる．$h(y) = e^{2\pi jy} = x$ を普遍被覆 $h: \mathbb{R} \to S^1$ とする．S^1 の任意の点 x におけるファイバ $h^{-1}(x)$ は $\mathbb{Z}$ と同型である．底空間の x を基点とした基本群 $\pi_1(S^1, x)$ は $\mathbb{R}$ の自己同型群となるが，それは $\mathbb{Z}$ と同型であり，$y \in h^{-1}(x)$，$m \in \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, x)$ に対して，$m: y \mapsto y + m$ と作用する．この作用はファイバに対して推移的であり，$h: \mathbb{R} \to S^1$ はガロア被覆となる．ガロア被覆の理論によれば，普遍被

覆 $h : \hat{X} \to X$ に対して $\mathrm{Gal}(\hat{X}/X) = \pi_1(X)$，$X \cong \hat{X}/\mathrm{Gal}(\hat{X}/X) = \hat{X}/\pi_1(X)$ である．$h : \mathbb{R} \to S^1$ の場合，ガロア群 $\pi_1(S^1)$ の $\mathbb{R}$ の基点 y への作用は軌道 $y + \mathbb{Z}$ を定め，その剰余空間である軌道空間は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と同型になり，底空間 S^1 と同一視されることになる．また，$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ の部分群は $m \in \mathbb{N}$ として $m\mathbb{Z}$ で尽くされ，それぞれがガロア対応の意味で軌道空間 $\mathbb{R}/(m\mathbb{Z}) \cong S^1$ 及び対応する被覆を定める．普遍被覆を用いて塔 (8) の対応物を書けば，以下の図式が可換になっている．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{R} & = & \mathbb{R} & = & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & = & \mathbb{R} \\
{\scriptstyle h=h_1^{(u)}}\downarrow & & {\scriptstyle h_{p_1}^{(u)}}\downarrow & & {\scriptstyle h_{p_1p_2}^{(u)}}\downarrow & \cdots & \downarrow & & {\scriptstyle h_{p_1\cdots p_{n-1}}^{(u)}}\downarrow \\
S^1 & \xrightarrow{h_{p_1}} & S^1 & \xrightarrow{h_{p_2}} & S^1 & & S^1 & \xrightarrow{h_{p_{n-1}}} & S^1
\end{array} \qquad (17)
$$

ここで，$h_k^{(u)} : y \mapsto e^{2\pi jky}$，$h_k : x \mapsto x^k$ などである．

アレー配列と普遍被覆空間との関係について考察する．普遍被覆空間 $\mathbb{R}$ の原点 $N = 0$ から正の方向に間隔 1 で素子アンテナが配列されていると見る．底空間 S^1 の基点を 0，普遍被覆空間 $\mathbb{R}$ の対応する基点は任意に取れるのだが簡単のため 0 とする．$\pi_1(X, 0)$ の部分群 $m\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ に自由に作用するが，これは素子間隔 m で素子アンテナを配列していく操作と解釈される．ここで以下の補題に注意しておく．証明は容易である．

補題 1 $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を重複を許した正の整数の集合とする．このとき，任意の $N \in \mathbb{N}$ は $0 \le m_i < p_i$, $(i \in \mathbb{N})$ により以下のように一意的に表現される．

$$
\begin{aligned}
N = m_1 + m_2 p_1 + m_3 p_1 p_2 + \cdots \\
+ m_n p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + \cdots
\end{aligned} \qquad (18)
$$

特に，$N_P = N \mod P$ とすると以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
N_{p_1p_2\cdots p_n} = m_1 + m_2 p_1 + m_3 p_1 p_2 + \cdots \\
+ m_n p_1 p_2 \cdots p_{n-1} \mod p_1 p_2 \cdots p_n
\end{aligned} \qquad (19)
$$

□

このような表示には一般論が存在するので説明する．有向集合 Λ を添字とする群の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ の全ての $\lambda \le \mu$ に対し自然な準同型 $\psi_{\lambda\mu} : G_\mu \to G_\lambda$ が存在し，$\psi_{\lambda\lambda}$ は恒等写像，更に全ての $\lambda \le \mu \le \nu$ に対し $\psi_{\lambda\nu} = \psi_{\lambda\mu} \circ \psi_{\mu\nu}$ が成り立つとき $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ は射影系をなすという．上の表示は射影系の典型例となっている．k, $l \in \mathbb{N}$ として k が l を整数の範囲で割り切る場合 $k|l$ と書くことにする．$k|l$ のとき $k \le l$ と定義すれば有向集合 Λ が構成できる．例えば式 (19) で $p_1p_2\cdots p_m | p_1p_2\cdots p_n$ の場合 $\psi_{p_1p_2\cdots p_m,\, p_1p_2\cdots p_n} : N_{p_1p_2\cdots p_n} \mapsto N_{p_1p_2\cdots p_m}$ であり，上が Λ を添字とする射影系の定義を満たすのが直ちに確認される．式 (18) は $\mathbb{Z}$ の部分集合だが，右辺の第 1 項以上の項は $p_1\mathbb{Z}$ の，第 2 項以上の項は $p_1p_2\mathbb{Z}$ の $\ldots$，とそれぞれ部分集合と見ることができる．加法群の包含関係 $\mathbb{Z} \supset p_1\mathbb{Z} \supset p_1p_2\mathbb{Z} \supset \cdots$ があるので次々と式 (19) の剰余群が適宜でき，射影系をなすわけである．射影系を一つ与えるということは部分群の包含順序まで考慮した列を指定することと同値で，図式 (17) の S^1 の塔に対応する基本群が上の加法群の包含関係に直接対応している．すなわち射影系を与えることとガロア被覆塔を指定することは同値である．本論文の例では射影系は加法群の包含関係として代数的に完全に規定されるので，対応するガロア被覆塔もそれで尽くされてしまうことになる．

ここでガロア被覆塔 (8) がどの程度一般的なものであるかについて考察する．群 G の部分群の系列，

$$
G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_m \supset \cdots
$$

において各 G_{i+1} が G_i の正規部分群で，得られる剰余群の列，

$$
G_0/G_1, \quad G_1/G_2, \quad \cdots, \quad G_{m-1}/G_m, \quad \cdots
$$

が単位群 e を除く単純群であるとき組成列という．なお，有限群の場合，ある m があって，$G_m = e$ で組成列は終わる．組成列に関して次の基本的な定理が知られている．

[ジョルダン＝ヘルダーの定理] [12]　G を群とし，

$$
\begin{aligned}
G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_r = e \\
G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_s = e
\end{aligned}
$$

を G の二つの組成列とすれば，$r = s$ であり，更にそれぞれの剰余群列，

$$
\begin{aligned}
G_0/G_1, \quad G_1/G_2, \quad \cdots, \quad G_{r-1}/G_r \\
H_0/H_1, \quad H_1/H_2, \quad \cdots, \quad H_{r-1}/G_r
\end{aligned}
$$

の順序を適当に選択すれば両者を同型にできる．□

式 (19) の特殊な場合として全ての p_i を素数かつ $P = p_1p_2\cdots p_n$ と置き，上記定理を適用すれば以下

の組成列が得られる．

$$\mathbb{Z}/P\mathbb{Z} \supset p_1\mathbb{Z}/P\mathbb{Z} \supset p_1p_2\mathbb{Z}/P\mathbb{Z} \supset \cdots \\ \supset p_1p_2\cdots p_{n-1}\mathbb{Z}/P\mathbb{Z} \supset 0 \qquad (20)$$

剰余群は $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ の形である．組成列としてこれより細かい分解は生じないので，対応するガロア被覆塔は最長となっている．

以上を定理としてまとめておく．

定理 1　P 素子等間隔リニアアレーアンテナのシェルクノフ多項式はガロア被覆塔上の関数とみなすことができ，アレーファクタの積による分解は $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$ の部分群の射影系から一意に定まる．特に，$\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$ の組成列に対応する射影系はガロア被覆塔として最長である．

□

続いて，アレーファクタの積による分解と給電系の関係について述べる．**2.** に述べたようにアレーファクタに対しトリーをを一意に与えることができる．具体的には i 番目のサブアレーファクタが $F^{(i)}_{p_i}(z^{p_1p_2\cdots p_{i-1}})$ ならば，サブアレー給電点を基点とし放射状に p_i 個に枝分かれするトリーを与えればよい．**2.** と同じように積の順序を考慮して全体のトリーが決まる．ここまでのステップではアレーファクタが n 個の積に分解する場合，n 次の対称群の作用に対応する $n!$ 個のトリーが得られることになる．しかしながらこれで全てのトリーが尽くされるわけではなく，アレーファクタの部分積をとる自由度も考慮しなければならない．射影系に関する結果と合わせれば，給電系のトリーまで考慮する場合，次の集合の要素からガロア被覆塔から生ずる範囲でアレー原理は定まることになる．

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) \qquad (21)$$

ただし，$G_\lambda, (\lambda \in \Lambda)$ は定理 1 内の $\mathbb{Z}/P\mathbb{Z}$ の部分群の射影系に対応し，$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ は Λ の要素の対称群が定める全ての置換に上記部分積を施したものの和集合の意味である．

一例として，式 (21) を 8 素子アレーの場合に実行してみる．この場合，組成列は $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \supset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \supset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \supset 0$ となる．任意励振分布でも分解の形は同じだが，**2.** でのアレー原理の説明に対応した ULA の記法を用いて全ての分解を求めると以下を得る．

$$\begin{aligned}
\Psi_8(x) &= \Psi_2(x)\Psi_2(x^2)\Psi_2(x^4) \\
&= \Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\Psi_2(x^2) \\
&= \Psi_2(x^2)\Psi_2(x)\Psi_2(x^4) \\
&= \Psi_2(x^2)\Psi_2(x^4)\Psi_2(x) \\
&= \Psi_2(x^4)\Psi_2(x)\Psi_2(x^2) \\
&= \Psi_2(x^4)\Psi_2(x^2)\Psi_2(x) \\
&= \{\Psi_2(x)\Psi_2(x^2)\}\Psi_2(x^4) \\
&= \{\Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\}\Psi_2(x^2) \\
&= \{\Psi_2(x^2)\Psi_2(x^4)\}\Psi_2(x) \\
&= \Psi_2(x)\{\Psi_2(x^2)\Psi_2(x^4)\} \\
&= \Psi_2(x^2)\{\Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\} \\
&= \Psi_2(x^4)\{\Psi_2(x)\Psi_2(x^2)\} \\
&= \{\Psi_2(x)\Psi_2(x^2)\Psi_2(x^4)\}
\end{aligned}$$

特に，$\{\Psi_2(x)\Psi_2(x^4)\}\Psi_2(x^2)$ に対応する給電系は，既に図 9 に示したとおりである．

3.6　絶対アレー原理

無限素子数を有するアレーアンテナを扱う場合，無限次のガロア被覆塔の操作が必要になる．

普遍被覆は指数関数による写であり，無限次の被覆の場合，代数曲線の圏では普遍被覆は存在しない．グロタンディークは代数曲線の圏の射影極限を用いてエタール基本群 $\pi_1^{\mathrm{et}}(X)$ を以下のように定義した [19].

$$\begin{aligned}
\pi_1^{\mathrm{et}}(X) &= \varprojlim_{Y/X:\text{有限次不分岐 Galois}} \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}(X)), \\
&= \mathrm{Gal}(M^{unram}/\mathbb{C}(X))
\end{aligned} \qquad (22)$$

本論文の場合，$X = \mathbb{C}^*$，$Y = \mathbb{C}^*$ であり，塔 (8) が代数的な被覆からなる射影系をなすことに注意する．また，M^{unram} は関数体 $\mathbb{C}(X)$ の最大不分岐拡大であり，$\mathrm{Gal}(M^{unram}/\mathbb{C}(X))$ は絶対ガロア群と呼ばれるのが一般的である．普遍被覆写 $h^{(c)}$ の場合，$h^{(c)} : \mathbb{C} = Y \to \mathbb{C}^* = X$ と考えるが，位相的ガロア群 $\mathrm{Gal}(Y/X)$ は $\pi_1(X)$ と同型になり，式 (22) に対応して以下が成り立つことが知られている [19].

$$\pi_1^{\mathrm{et}}(X) \cong \hat{\pi}_1(X) \qquad (23)$$

ただし，$\hat{\pi}_1(X)$ は $\pi_1(X)$ の副有限完備化である．リニアアレーのガロア被覆の場合，$\mathbb{C}(X)$ に対して $S = \{X^{1/n} | n \in \mathbb{N}\}$ として $M = \mathbb{C}(X)(S)$ と定義すれば $M^{unram} = M$ であり，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Gal}(M^{unram}/\mathbb{C}(X)) = \hat{\mathbb{Z}} \tag{24}$$

ただし，$\hat{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ の副有限完備化で，p 進整数 $\mathbb{Z}_p$ と次のように関係している．

$$\hat{\mathbb{Z}} \;=\; \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\cong\; \prod_{p:\text{全ての素数}} \mathbb{Z}_p \tag{25}$$

$\hat{\mathbb{Z}}$ の要素を一つ選べば射影系が一つ指定されるので，前節の定理 1 の意味でアレー原理が指定される．有限アレーの場合は射影系の素子数を超える部分を全て零とみなせばよい．射影系の選び方はこれで全てが尽くされるので，$\hat{\mathbb{Z}}$ はその意味でアレーアンテナの絶対ガロア群である．給電系のトリーまで考慮し，$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ を射影系ごとの有向集合の置換に部分積を施したものの意味とすれば，次式はガロア被覆塔から生ずる範囲の全てのアレー原理を含むことになる．

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\,\hat{\mathbb{Z}} \tag{26}$$

これを絶対アレー原理と呼ぶのはいかがであろうか．

4. 高次元アレーへの一般化の道

前章のガロア被覆を用いた理論は幾何学色が濃く，物理解釈が比較的容易な利点がある．しかしながら，平面アレーなど，高次元へ理論を拡張するには，代数的な観点が見通しが良いように思われる．ここでは，アーベル群の双対性に派生するガロア対応を用いて，純代数的観点から，高次元化への道を模索したい．

まず，用語の説明も含めて準備を行う．G をアーベル群，$\mathbb{C}^{\times}$ を複素数の乗法群とする．G から $\mathbb{C}^{\times}$ への準同型 $\tilde{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^{\times})$ はアーベル群となり，G の指標若しくは双対と呼ばれる．加法的に書けば $\tilde{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ と同型であり，以下が知られている．

[アーベル群の双対定理] [17]　　G を加法アーベル群とし，部分群 $H \subset G$ と $\Phi \subset \tilde{G}$ が以下の関係を満たすとする．

$$H^{\perp} = \{\chi \in \tilde{G} \mid \chi(h) = 0 \quad (\forall h \in H)\}$$
$$\Phi^{\perp} = \{x \in G \mid \chi(x) = 0 \quad (\forall \chi \in \Phi)\}$$

この場合，$H^{\perp}$ と $\Phi^{\perp}$ は，それぞれ，$\tilde{G}$ と G の部分群（零化部分群と呼ばれる）となり，以下の同型が存在する．

$$H^{\perp} \cong \widetilde{G/H}, \qquad \tilde{G}/H^{\perp} \cong \tilde{H}$$

これらには，ガロア対応 ($H \longleftrightarrow H^{\perp}$，$\Phi^{\perp} \longleftrightarrow \Phi$) が存在する．

$$(H^{\perp})^{\perp} \cong H, \qquad (\Phi^{\perp})^{\perp} \cong \Phi$$

□

前章のガロア被覆塔 (8) は次の加法アーベル群の系列を与える．

$$\mathbb{Z} \supset p_1\mathbb{Z} \supset p_1p_2\mathbb{Z} \supset p_1p_2p_3\mathbb{Z} \supset \cdots$$

これに対応する指標群の零化部分群の列は以下となる．

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/p_1\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/p_1p_2\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/p_1p_2p_3\mathbb{Z} \subset \cdots$$

これらについて，前章と同様なガロア対応を構築できる．例えば，最初の部分 $\mathbb{Z} \supset p_1\mathbb{Z}$ には零化部分群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/p_1\mathbb{Z}$ が対応し，ガロア群は $\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}$ となる．

以上，代数的な議論のみでアレーアンテナのガロア対応が再構築されたが，ここで，シェルクノフ単位円 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^{\times} \mid |z| = 1\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の数学的対応物について考察してみる．なお，$\mathbb{T} \cong S^1$ であるが，あえて前章と異なる記法を導入する．

$\mathbb{T}$ は一次元トーラスと呼ばれる．n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ は $\mathbb{T}$ の n 次の直積で定義される．位相群の理論より，以下が知られている [17]，

$$\tilde{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T} \tag{27}$$

この場合，$\tilde{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ のポントリャーギン双対と呼ばれ，離散群 $\mathbb{Z}$ のポントリャーギン双対がコンパクト群であるトーラス群 $\mathbb{T}$ に等しいことを意味している．双対の双対については，群の生成元のとり方によらない標準的な同型が存在することが知られている．

[ポントリャーギン双対定理] [17]　　G を局所コンパクトアーベル群とする．$x \in G$ 及び $\chi \in \tilde{G}$ として，写像 $\eta : G \to \tilde{G}$

$$\eta(x)(\chi) = \chi(x)$$

は代数的にも，位相的にも標準的同型である．

□

すなわち，$\tilde{\tilde{Z}} \cong \tilde{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ であり，$\tilde{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$ の逆対応（ガロア対応）が $\mathbb{Z} \cong \tilde{\mathbb{T}}$ ということである．等間隔リニアアレーの場合，$m \in \mathbb{Z}$ は m 番目の素子位置を表し，シェルクノフ単位円 $\mathbb{T}$ がその双対となる．更に具体的には，アレー配列はユニバーサルパラメータ u の空間中

の $\mathbb{Z}$ であり，その指標が $\mathbb{T}$，つまりシェルクノフ単位円と同型になる．なぜならば，加法群の生成元 $1 \in \mathbb{Z}$ から $\mathbb{T}$ の点への準同型写像を対応させせることにより，

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

が成り立つからである．

形式的な高次元化は容易で，$\mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{Z}$ の n 次の直積として以下の同型が成り立つ．

$$\widetilde{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{T}^n$$

特に，二次の場合，三次元空間に埋め込める通常の意味のトーラス $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ が得られる．また，実用例は少ないが物理的には実現可能三次元アレーへは $\mathbb{T}^3$ が対応する．すなわち，数学の観点からするとシェルクノフ単位円は S^1 というよりは一次元トーラス $\mathbb{T}$ とみなすのが妥当と考えられ，高次元化も含めてシェルクノフトーラスと命名するのも一案と思われる．

なお上記結果は各次元ごとの素子配列がテンソル積で表されるような単純なアレーの場合の初歩的考察にすぎない．前章と同様な給電系の構成も含めた一般的な考察については，今後の研究に期待したい．

5. むすび

アレーアンテナを数学的対象物として明確化し，アレー原理とガロア理論の関係を明らかにした．

本論文が出版される 2012 年は 21 歳で夭逝したガロアの生誕 201 年目にあたる．ここで利用した数学は，ガロアが発見した群論，方程式論に端を発し，19 世紀から 20 世紀初頭にかけて発展した代数関数論を経て，20 世紀中盤で大きく花開いた代数幾何学の一部である．それは数学のメインストリームの一つであり，工学者も見本とすべき素晴らしい理論と感じられる．驚くべきは，当該定理のほとんど全ては，その着想や証明が 20 代の若者により達成されたことである．アンテナ・伝搬技術の道へ足を踏み入れた若い力が人類の英知を踏まえ，工学の未来を築いていくことを望む．

文献

[1] S.A. Schelkunoff, “A mathematical theory of linear arrays,” Bell Syst. Tech. J., vol.22, pp.80–107, 1943.

[2] D.K. Cheng and M.T. Ma, “A new mathematical approach for linear array analysis,” IRE Trans. Antennas Propag., vol.AP-8, pp.255–259, May 1960.

[3] P.L. Christiansen, “On the closed form of the array factor for linear arrays,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-11, no.2, p.198, March 1963.

[4] D.K. Cheng, “Z-transform theory for linear array analysis,” IRE Trans. Antennas Propag., vol.AP-11, no.5, p.593, Sept. 1963.

[5] R.E. Collin, “The use of transforms to sum array factors,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-12, no.3, pp.368–369, May 1964.

[6] P.L. Christiansen, “Z-transform theory in general array analysis,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-12, no.5, p.647, Sept. 1964.

[7] M.T. Ma, “An application of the inverse Z-transform theory to the synthesis of linear antenna arrays,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-12, no.6, pp.798–799, Nov. 1964.

[8] E.I. Jury, “The use of transforms to sum array factors,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-13, no.2, p.318, March 1965.

[9] D.J. Gaushell, “Synthesis of linear antenna arrays using Z transforms,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-19, no.1, pp.75–80, Jan. 1971.

[10] D.E.N. Davies, “Independent angular steering of each zero of the directional pattern for a linear array,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-15, no.2, pp.296–298, March 1967.

[11] J. Clarke, “Steering of zeros in the directional pattern of a linear array,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-16, no.2, pp.267–268, March 1968.

[12] B.L. van der Waerden, Modern algebra I, II, Springer Verlag, Berlin, 1937.

[13] J. Matousek and J. Nesetril, Invitation to discrete mathematics, Oxford University Press, New York, 1998.

[14] 岩澤健吉，代数函数論 増補版，岩波書店，東京，1952.

[15] W. Fulton, Algebraic Topology, a First Course, Springer-Verlag, New York, 1995.

[16] O. Forster, Lectures on Riemann Surfaces, Springer-Verlag, New York, 1981.

[17] ポントリャーギン，連続群論 上，岩波書店，東京，1957.

[18] J.P. Serre, “ Géométrie algébraique et géométrie analytique,” Ann. de L’Inst. Fourier, vol.6, pp.1–42, 1955.

[19] A. Grothendieck, Revêtement étale et groupe fondamental (SGA1), Lecture Notes in Math., vol.224, Springer-Verlag, New York, 1971.

[20] J.P. Serre, Local Fields, Springer-Verlag, New York, 1979.

[21] J.P. Serre, Algebraic Groups and Class Fields, Springer-Verlag, New York, 1988.

[22] J. Neukirch, Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

[23] 松本幸夫，トポロジー入門，岩波書店，東京，2002.

[24] 永田雅宜，可換体論，裳華房，東京，1985.

[25] 藤崎源二郎，体とガロア理論，岩波書店，東京，1997.

[26] F.Q. Gouvea, p-adic Numbers: An Introduction, Springer-Verlag, New York, 1997.

[27] 桂　利行，“代数幾何学の教科書をめぐって,” 数学のたの

しみ (7)，pp.129–136, 日本評論社，東京，June 1998.
[28] 久賀道郎，ガロアの夢—群論と微分方程式，日本評論社，東京，1968.
[29] 佐竹一郎，代数学への誘い，遊星社，東京，1996.

付　録

本論文で用いた数学の文献案内

本論文は，多くの数学用語や定理を利用しており，工学系読者の便宜のため文献案内をしておく．網羅的ではなく，良いと思われる文献を少数示す方針とした．

最も基本的な体のガロア理論については非常に多くの教科書が出版されているが，代数系の初歩から記載されている [12] のガロア理論の章まで読み進むことを勧める．被覆空間については，位相空間論の初歩から始めて，基本群の作用が明快に記載されている [23] がある．上記 2 書程度の知識を前提として [14] を通じて被覆空間のガロア理論と代数関数論を学ぶことを勧める．より現代的な書き方で [14] よりやさしいものとして [15] がある．これらに相補的なものは [16] であろう．無限次ガロア拡大の理論については [24], [25] がある．副有限群を概観するには [26] が入門書である．絶対ガロア群については [20]～[22] などに記載があるが，それなりの数学的素養を前提としている．エタール基本群に関する代表的文献は [19] だが，かなりの代数幾何学の知識を前提としている．[27] に代数幾何学教科書やその勉強法が記載されおり，筆者も多くの点で同意する．ポントリャーギン双対性については [17] に位相群の初歩から丁寧に記載されている．最後に，工学者に近づきやすいと思われる読み物風の文献を挙げておく．ガロア被覆については [28]，無限次ガロア拡大については [29] がある．

（平成 23 年 12 月 27 日受付，24 年 4 月 17 日再受付）

宮下　裕章　（正員）

1987 東大・工・物理工学卒．1988 三菱電機（株）入社．以来，公衆通信，衛星通信，レーダなどのアンテナの研究に従事．現在，同社情報技術総合研究所アンテナ技術部グループマネージャ．博士（情報学）．1994 IEEE AP-S Japan Chapter Young Engineer Award，平 7 本会学術奨励賞受賞．IEEE シニア会員，Americal Physical Society，Americal Mathematical Society 各会員．