

波面と鏡面

牧野 滋^{†a)} 片木 孝至[†]

Some Considerations on Wave Fronts and Reflectors

Shigeru MAKINO^{†a)} and Takashi KATAGI[†]

あらまし 反射鏡アンテナでは、鏡面は、入射した波面を所望の反射波面に変換する波面変換器と考えられる。幾何光学的に考えると、入射波が与えられた場合、光路長を決めれば、鏡面と波面とは1対1で対応する。したがって、鏡面設計においては、所望の鏡面を直接設計する方法と、まず所望の波面を求め、この波面から鏡面を決める方法とがある。従来、前者による鏡面設計については多くの研究がなされてきたが、後者の方が設計の見通しがいい、あるいは、設計が簡単になる場合もある。また、波動的に考えると、鏡面で反射された電磁波は、伝搬するに従ってその波面の曲率半径やビーム半径が変化していく。波長に比べて大きな鏡面を複数枚用いるような反射鏡アンテナを波動的に解析する場合、計算時間の観点からビームモード展開を用いた解析が有効である。特に、ビームモードの基本モードを用いると、簡単な計算式により、波動的振舞いを考慮した鏡面設計、交差偏波発生量の評価が可能である。本論文では、幾何光学的及び波動的観点から、鏡面と波面との関係について論じる。

キーワード 反射鏡アンテナ、波面、幾何光学、ビームモード、交差偏波

1. ま え が き

反射鏡アンテナは、一次放射器と鏡面系という簡単な構造により、高利得、低サイドローブのペンシルビームや所望のエリアを効率良くカバーする成形ビームを実現できるため、衛星通信地球局用アンテナ、電波天文用アンテナ、衛星搭載用アンテナなどに利用されている。反射鏡アンテナに使用される反射鏡は波長に比べて大きい場合が多いため、鏡面系設計には幾何光学の技術が、波動的な効果を含めて解析する場合には物理光学の技術を用いるのが一般的である。

幾何光学を用いた鏡面設計においては、所望の遠方放射特性を実現する鏡面を直接設計する方法と、まず所望の遠方放射特性を実現する波面を求め、この波面から鏡面を決める方法とがある。両者の違いは、反射の法則を用いるか光路長一定の法則を用いるかの選択に起因するものであるが、鏡面と波面とは1対1で対応するためいずれの方法を用いても設計結果には

大差はない。しかし、与えられた問題に対して使い分ける方が設計の見通しがいい、あるいは、設計が簡単になる場合がある。例えば、1枚の反射鏡を用いて成形ビームアンテナを設計する場合、従来は、二重曲面反射鏡アンテナを中心として、前者による鏡面設計については多くの研究がなされてき [1], [2], また、その鏡面設定法におけるあいまいさを指摘するとともに解曲面の一意性についても論じられている [3]。本論文では、反射の法則と光路長一定の法則とは互いに等価の関係にあることを示すと同時に、多少遠回りのように見える後者の設計法では二重曲面反射鏡面のあいまいさは存在せず、定性的に見通しのよい設計が可能になることを示す。

反射鏡の大きさが波長に比べて十分大きいといえない場合には、幾何光学による設計では誤差が大きくなる。したがって、電磁波の波動的な振舞いを考慮した簡易な設計法が必要となる。本論文では、複数の二次曲面鏡で構成される反射鏡アンテナにおいて、ビームモード [4] ~ [6] の基本モード及び最小限の高次モードを用いて論じることによって電磁波の基本的な性質を簡易な式で表すことができ、その波動的振舞いに対して高い見通しや知見が得られることを示す。ビームモードによると、鏡面で反射された後、伝搬するに

[†] 金沢工業大学工学部情報通信工学科, 石川県

Department of Information and Communication Engineering, Kanazawa Institute of Technology, 7-1 Ohgigaoka Nonoichi, Ishikawa-ken, 921-8501 Japan

a) E-mail: makino@neptune.kanazawa-it.ac.jp

従って変化していく電磁波の波面の曲率半径やビーム半径を見通しの良い簡易な式で表現することが可能であり、これによって、波動的振舞いを考慮した鏡面設計が可能になることを示す。また、交差偏波についてもその波動的振舞いについても明確にし、従来から知られている複数反射鏡アンテナの幾何光学的交差偏波消去条件 [7], [8] の意味合いについても論じる。なお、反射鏡開口上の電磁界をビームモードに展開することにより反射鏡アンテナを解析する手法は、従来から用いられている物理光学法に比べて極めて少ない計算時間で解析できる特徴を有するため、多数の反射鏡で構成されるアンテナ解析、特に、反射鏡の大きさが波長に比べて大きい場合には極めて有効な解析手法であるが、これについては文献 [6] を参考にして頂きたい。

2. 幾何光学的検討

2.1 鏡面と波面の関係

図 1 のように、鏡面と波面とを独立変数 (ξ_1, ξ_2) を用いて、それぞれ、 $R(\xi_1, \xi_2)$, $W(\xi_1, \xi_2)$ と表す。幾何光学的には、波面はその法線方向に進行すること、及び、光路長一定の法則より、 R と W とには次の関係がある。

$$W = R + (C - r_p)n_w \quad (1)$$

ここで、 r_p は原点 O から鏡面までの距離、 C は原点 O から出た光線が鏡面で反射後に波面に至るまでの光路長であり定数である。また、 n_w は波面の単位法線ベクトルであり、次式で表される。

$$n_w = \frac{\frac{\partial W}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial W}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \right|} \quad (2)$$

また、鏡面 R は、点 O に置かれた点波源から出た球面波を所望の波面 W に変換するものとし、次式で表す。

$$R = r_p e_r \quad (3)$$

ここで、 e_r は点 O からの方向を表す単位ベクトルである。式 (3) を式 (1) に代入し、 e_r を消去すると、 r_p は次のようになる。

$$r_p = \frac{W \cdot W - 2CW \cdot n_w + C^2}{2(C - W \cdot n_w)} \quad (4)$$

これを式 (1) に代入すると、結局、与えられた波面を実現する鏡面は次のようになる。

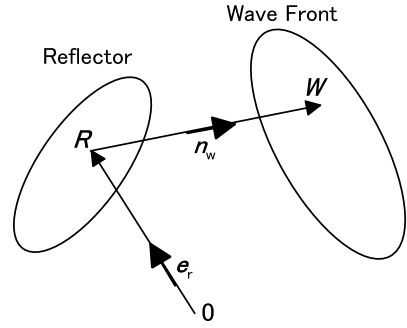


図 1 波面と鏡面を表す座標系
Fig. 1 Coordinate system of a wave front and a reflector.

$$R = W + \frac{W \cdot W - C^2}{2(C - W \cdot n_w)} n_w \quad (5)$$

ここまで、与えられた波面から鏡面を決定するための条件としては光路長一定の法則のみを用いており、鏡面の反射の法則は用いていない。これは、光路長一定の法則を満足する鏡面は、自動的に反射の法則を満足するからである。これらの法則がいずれもフェルマーの原理に基づく法則であることを考えると両者が互いに独立ではないことは明白であるが、直接的には次のように証明される。

式 (3) を ξ_1 で偏微分すると、

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} = \frac{\partial r_p}{\partial \xi_1} e_r + r_p \frac{\partial e_r}{\partial \xi_1} \quad (6)$$

更に両辺で、 e_r との内積をとると、

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} \cdot e_r = \frac{\partial r_p}{\partial \xi_1} \quad (7)$$

また、式 (1) を ξ_1 で偏微分すると、

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_1} = \frac{\partial R}{\partial \xi_1} - \frac{\partial r_p}{\partial \xi_1} n_w + (C - r_p) \frac{\partial n_w}{\partial \xi_1} \quad (8)$$

両辺で n_w との内積をとり、式 (2) の関係を用いると、

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} \cdot n_w = \frac{\partial r_p}{\partial \xi_1} \quad (9)$$

式 (7)、式 (9) より、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_1} \cdot (e_r - n_w) = 0 \quad (10)$$

独立変数 ξ_2 についても同様にして、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial R}{\partial \xi_2} \cdot (e_r - n_w) = 0 \quad (11)$$

式 (10) 及び式 (11) は、 $(e_r - n_w)$ が鏡面の接平面に垂直であること、すなわち、反射の法則を自動的に満足していることを示している。

つまり、点波源から出た球面波を所望の波面に変換するような 1 枚反射鏡アンテナの鏡面設計においては、鏡面の反射の法則と光路長一定の法則とは独立の条件ではないため、一方のみを使用すればいい、あるいは、一方のみしか使用できないことになる。N 枚の反射鏡より構成される多重反射鏡アンテナにおいては、入射波面あるいは反射波面の少なくとも一方が球面波または平面波であるような任意の 1 枚の鏡面については、これらの法則のいずれか一方により設計でき、他の $N - 1$ 枚の鏡面については設計の自由度があるということになる。上記いずれの法則を使用するのに対応して、所望の遠方界放射特性を実現する鏡面を直接設計する方法と、まず所望の遠方界放射特性を実現する波面を求め、この波面から鏡面を決める方法とがある。どちらの方法をとるかの選択は設計者の自由であるが、鏡面の反射の法則は微分形式で与えられるため、前者の方法により鏡面を直接設計する場合には一般には微分方程式を解く必要があるのに対し、後者の方法では波面の単位法線ベクトルを求めるための微分計算は必要ではあるが、鏡面は式 (5) によってストレートフォワードに求めることができるという特徴がある。また、鏡面と異なり波面は、その形状が分かれば、複雑な計算をしなくても定性的な遠方界放射特性の予測が可能であり、設計の見通しが良いという特徴もある。その一方、電力の条件（一般には、一次放射パターンと遠方界パターンとの関係より導出される微分方程式になる）や鏡面に対する制約条件（例えば、反射鏡の開口形状など）を考慮すると、前者の方法ではこれらの条件を含めて直接鏡面を設計することができるのに対し、後者の方法ではこれらの条件を波面に対する条件に置き換えることが困難な場合もあり、結果として必ずしも鏡面設計が容易になるわけではない場合があることを付け加えておく。

以下、パラボラ反射鏡と二重曲面反射鏡を例に、両者を比較する。

2.2 パラボラ反射鏡

パラボラ鏡面は、入射した球面波を平面波に変換する鏡面であり、簡単な構造で高利得なアンテナを実現するのに適しているため、衛星通信用地球局ほか、様々な分野で使用されている。

まず、鏡面を反射の法則を用いて解くことを考える。

鏡面 R を次式のように x, y を独立変数として表す。

$$R = xi + yj + z(x, y)k \quad (12)$$

このとき、鏡面の単位法線ベクトル n_r は次のようになる。

$$n_r = \frac{\frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y}}{\left| \frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y} \right|} \quad (13)$$

また、入射光線の進行方向 e_r は

$$e_r = \frac{R}{|R|} \quad (14)$$

であり、これより、反射後の光線の進行方向 e_s は次のようになる。

$$e_s = e_r - 2(e_r \cdot n_r)n_r \quad (15)$$

求める鏡面（パラボラ鏡面）を、式 (15) で表される反射後の光線の進む方向 e_s が k 軸（パラボラ軸）と一致するような鏡面であるとすると、その条件は次式で表される。

$$e_s \times k = 0 \quad (16)$$

式 (12) から (15) を式 (16) に代入して整理すると、結局、下記の x, y に関する非線形連立偏微分方程式になり、これを解くことによって鏡面が求められる。

$$(-p_1^2 + q_1^2 + 1)x - 2p_1q_1y + 2p_1z = 0 \quad (17)$$

$$-2p_1q_1x + (p_1^2 - q_1^2 + 1)y + 2q_1z = 0 \quad (18)$$

ここで、

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$q_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

次に、光路長一定の条件を用いて解くことを考える。所望の波面を xy 面上の平面波とすると、波面 W は次のように表すことができる。

$$W = xi + yj \quad (19)$$

これを式 (2) に代入すると、次式となる。

$$n_w = k \quad (20)$$

式 (19)、(20) を式 (5) に代入して整理すると、次式が

得られる．

$$\mathbf{R} = xi + yj + \frac{x^2 + y^2 - C^2}{2C}k \quad (21)$$

これより，

$$z = \frac{x^2 + y^2 - C^2}{2C} \quad (22)$$

となり，解である鏡面は回転放物面鏡であることが分かる．なお，式 (17)，(18) の微分方程式を解くことはしなかったが，式 (22) がこれらの方程式を満足することは，式 (22) を式 (17)，(18) に代入して計算すれば容易に分かる．

以上のように，反射の法則を用いて直接鏡面を求める方法に比べて，まず所望の波面を求め，その波面より鏡面を求める方が，微分方程式を解く必要もなく容易に鏡面を設計できることが分かる．

2.3 二重曲面反射鏡

二重曲面反射鏡は，図 2 に示すように，脊椎曲線 (Spine curve) に沿って動く肋骨曲線 (Rib curve) が作る曲面として定義される．肋骨曲線は，原点 O から出た光線がこの肋骨曲線で反射された後に所望の方向 e_s に向かうよう決定されるため，原点 O を焦点とし e_s 方向を鏡軸とする回転放物面鏡と肋骨平面と呼ばれる $x-z$ 面に垂直な平面との交線として決定される．しかし，従来は，この肋骨平面には y 軸周りの回転角の選び方に自由度があり，その決定法があいまいであった．野本は文献 [3] で，二重曲面反射鏡設計における解曲面の一意性について論じ，微分方程式を解く際に，全微分条件 (あるいは可積分条件) を付加する必要があることを指摘するとともに，肋骨曲線を構成する肋骨平面を e_s を含む平面 (文献 [3] の受信平面) と一致するように選ぶ場合においてのみ，扇形ビームの合成が厳密にできることを示した．その手法は鏡面の反射の法則をもとにしたものであり，具体的には，前節と同様にして反射後の光線の進む方向 e_s を求めたとき，幾何光学的意味合いにおいて $x-z$ 面内のみに扇形ビームを合成するための条件である $e_s \cdot j = 0$ より式 (17)，(18) と同様の非線形偏微分方程式を導出し，これを解くことによって幾何光学的厳密解の存在とその一意性を証明している．

一方，光路長一定の法則を用いると，パラボラ反射鏡の場合と同様，微分方程式を解くまでもなくこれを証明することが可能である．波面 W を x, y を独立変数として次のように表す．

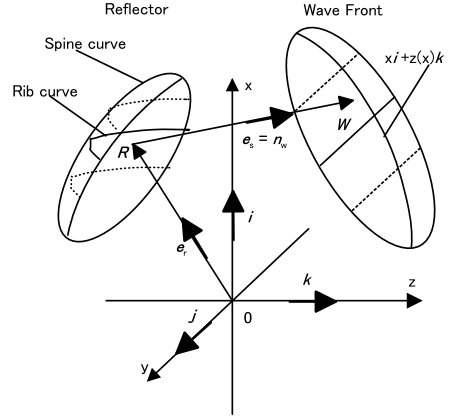


図 2 二重曲面反射鏡
Fig. 2 Doubly curved reflector.

$$W = xi + yj + z(x, y)k \quad (23)$$

この波面の単位法線ベクトル n_w は式 (2) より次のようになる．

$$n_w = \frac{-p_1i - q_1j + k}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + 1}} \quad (24)$$

$x-z$ 面内のみに扇形ビームを合成するための条件は， n_w すなわち波面の進行方向が y 成分をもたないことであるから，次式で与えられる．

$$n_w \cdot j = 0 \quad (25)$$

これより， $q_1 = 0$ ，すなわち， z は x のみの関数になり，波面 W は次のようになる．

$$W = xi + yj + z(x)k \quad (26)$$

これは， $xi + z(x)k$ なる平面曲線を y 方向に動かすことによって得られる柱面であると同時に，この平面曲線を準線， y 方向の直線を母線とする線織面を表している．このとき，波面の単位法線ベクトル n_w は x のみの関数で y に依存しないため，母線上での法線方向は一定になる．なお， x と z との関係は，一次放射パターンと所望の遠方界パターンとの関係より導出される微分方程式で表される電力の条件から決定される．このとき， $xi + z(x)k$ で表される線織面の準線に対応した鏡面上の曲線が脊椎曲線，母線に対応した鏡面上の曲線が肋骨曲線となる．また，この肋骨曲線が母線の法線方向を鏡軸とする放物線になることは明らかであり，肋骨曲線を構成する肋骨平面を受信平面と一致するように選ぶ必要があるという文献 [3] の主張と一

致している．結局，波面が上記線織面であることが解の必要十分条件であり，幾何光学的厳密解の存在とその一意性を証明できた．

なお，文献 [3] では， S 字形や U 字形のような曲率を有する二重曲面反射鏡についても示している．この場合においても，所望の波面は母線上での法線方向が一定となるような線織面となる．母線上で法線方向が一定となる線織面は可展面と呼ばれ，数学的には柱面，錐面，接線曲面のいずれかであることが証明されている [10]． $x-z$ 面内のみならず扇形ビームを合成するような二重曲面反射鏡においては波面が柱面となることは説明したが，波面を錐面とすれば，曲率を有する二重曲面反射鏡を設計することができる．例えば上記柱面は母線が y 軸と平行な線織面，すなわち， y 軸上の無限遠にある定点を頂点とする錐面であると考えることができるが，この頂点を y 軸上の有限の位置に選べば y 方向にもビームを放射する U 字形ビームを，波面の上半分を $+y$ 方向の有限の位置を頂点とする錐面，下半分を $-y$ 方向の有限の位置を頂点とする錐面に選べば S 字形ビームを，また，この頂点を z 軸上の有限の位置に選べば O 字形ビームを， N 角錐面に選べば N 個の方向にピークをもつビームを有する鏡面を設計できると考えられるが，具体的に設計した例はない．なお，文献 [9] では二次元的な面をフットプリントとする成形ビームアンテナが示されているが，その設計の基本となる考え方は母線上での法線方向が一定となるような線織面を波面とする点にあり，この線織面は接線曲面である．

3. ビームモードによる波動的検討

3.1 鏡面と波面，ビーム半径の関係

二次曲面鏡よりなる鏡面の解析法として，鏡面開口上の電磁界をビームモードに展開し，これを用いて任意の位置における電磁界を計算する方法がある．この方法を用いれば，ある反射鏡から反射された電磁界（すなわち，鏡面開口上の電磁界）をビームモードに展開することにより次の反射鏡に入射する電磁界を容易に求めることができ，幾何光学の技術を用いてこの反射鏡による反射電磁界を求めて再度ビームモードに展開する，ということを繰り返すことにより，複数の二次曲面鏡よりなる反射鏡アンテナを解析することができる．これをビームモード展開法と呼ぶ [6]．また，反射鏡に入射したある一つのモードの電磁界がこの反射鏡から反射された後にどのようにモード展開される

かについても，前記の幾何光学の技術に基づき，解析的に求められている．したがって，波源である一次放射器の開口分布さえビームモードに展開しておけば，計算時間を必要とする積分などを用いることもなく，各反射鏡からの放射特性を短い計算時間で次々と計算できるという特徴がある．また，各ビームモードは導波管モードと同様に電磁界全体に対応したいわゆる entire function であるため，計算時間が反射鏡の大きさに依存しないという特徴もある．

ここでは，一次放射器から放射される電磁界，すなわち，最初の反射鏡に入射する電磁界を基本ビームモードのみとし，また，反射鏡から反射される電磁界についても基本モード及び最小限の高次モードのみを用いて論じることにより，電磁波の基本的な性質を簡易な式で表すことができ，その波動的振舞いに対して高い見通しや知見が得られることを示す．また，これによって，波動的振舞いを考慮した鏡面設計が可能になることを示す．

円筒座標系 (ρ, ϕ, z) で定義される (m, n) 次のビームモードは，直交座標系を用いると，ビームウエストの位置からの距離 z の関数として次のように表される [6]．

$$E_{m,n}^R = \frac{2}{\omega} F_{l,n}(t) e^{j[(2n+l+1) \tan^{-1} v - \frac{k\rho^2}{2R}] e^{i(m+1)\phi}}$$

$$F_{l,n}(t) = \sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}} (2t^2)^{\frac{l}{2}} L_{n,l}(2t^2) e^{-t^2}$$

$$v = \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \quad (27)$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1+v^2} \quad (28)$$

$$R = z \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) \quad (29)$$

ここで， $t = \rho/\omega$ ， $l = |m+1|$ ， k は波数， ω_0 は基本ビームモードのビームウエストでのビーム半径， ω 及び R はそれぞれ， z の位置における基本ビームモードのビーム半径，波面の曲率半径を表している．また， $L_{n,l}$ はラゲールの多項式， i は電界の向きを表す複素記号である．なお，ビームウエストとは，図 3 に示すように，基本ビームモードのビーム半径（電界が $1/e$ になる ρ の値）が最小となる位置を示しており，ビームウエストにおいては波面の曲率半径は ∞ ，すなわち平面波となる．また， $z=0$ から離れるに従ってビーム半径 ω ，波面の曲率半径 R が変化していき，これは $z=0$ の面に対して左右対称となる．

結局，各モードによる電界は， z の関数として表さ

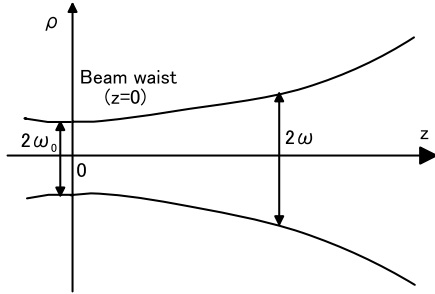


図 3 ビーム半径とビームウエスト
Fig. 3 Beam radius and beam waist.

れる基本ビームモードのビーム半径 ω と波面の曲率半径 R , 及び v によって特徴づけられることになる. また, 式 (27) に式 (28), (29) の関係を代入して整理すると, v は次のように表すこともできる.

$$v = \frac{\pi\omega^2}{\lambda R} \quad (30)$$

このとき, x 偏波を正偏波とすると, 正偏波の基本モード E_{co} は $(-1, 0)$ モード, 交差偏波の基本モード E_{cr} は $(0, 0)$ モードと $(-2, 0)$ モードとの合成であり, それぞれ次のように表される.

$$\begin{aligned} E_{co} &= E_{-1,0}^R \\ &= \frac{2}{\omega} e^{-t^2} e^{j(\tan^{-1} v - \frac{k\rho^2}{2R})} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} E_{cr} &= E_{-2,0}^R - E_{0,0}^R \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\omega} t e^{-t^2} e^{j(2\tan^{-1} v - \frac{k\rho^2}{2R})} (i \sin \phi) \end{aligned} \quad (32)$$

つまり, 正偏波は回転対称なガウス分布を振幅分布とする球面波, 交差偏波は, x 方向の正偏波に対してその偏波方向が i であるから y 方向のみの電界成分となり, また, $\sin \phi$ は $\phi = \pi/2$ と $\phi = 3\pi/2$ とで符号が異なる極大値となるため, $\pm y$ 方向で逆相のピークをもつ, いわゆる二つ目玉の振幅分布となる. また, 式 (31), (32) より明らかなように, 正偏波の基本モードを基準にすれば, 交差偏波の基本モードの位相は $\tan^{-1} v$ だけ変化する. つまり, ビームウエスト ($z = 0$) においては正偏波と交差偏波とは同位相であるが, ビームが進行するにつれて位相差が生じ, 例えば遠方界の場合には, 式 (27) より v は ∞ となるため, 位相差 $\tan^{-1} v'$ は $\pi/2$ となる. これは, 間隔 $2s$ で配置された 2 素子アレーアンテナにおいて, 同相で励振した場合のアレーファクター $2 \cos(ks \sin \theta)$ (ここで, θ は観測角度) に対して逆相励振した場合のアレーファク

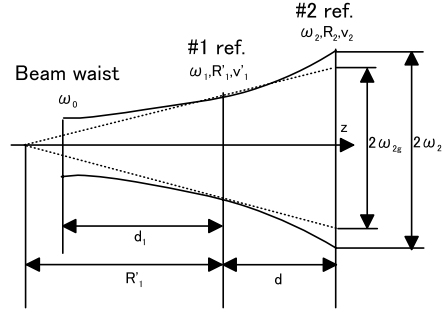


図 4 鏡面と波面, ビーム半径
Fig. 4 Reflectors, wave fronts and beam radii.

ターが $j2 \sin(ks \sin \theta)$ となって, 位相差が $\pi/2$ となるのと同じである.

次に, ある鏡面 #1 上でのビーム半径 ω_1 , 波面の曲率半径 R'_1 が与えられたとき, 距離 d だけ離れた次の鏡面 #2 に入射するビームのビーム半径 ω_2 , 波面の曲率半径 R_2 を求める. 図 4 は, ビーム半径 ω_1 , 波面の曲率半径 R'_1 で定義される鏡面 #1 上の基本モードが伝搬していく様子を模式的に表したものであり, 実線がビームモード, 破線が幾何光学に基づくビームを示している. 幾何光学的には, 鏡面 #1 の位置から $-z$ 方向に R'_1 だけ進んだ位置が焦点となり, そのビーム半径は 0 になる. 一方, ビームモードを用いると, 式 (28), (29) の関係より, ビームウエストまでの距離 d_1 , ビームウエストでのビーム半径 ω_0 は次のようになる.

$$d_1 = \frac{R'_1}{1 + \frac{1}{v_1^2}} \quad (33)$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + v_1^2}} \quad (34)$$

$$v'_1 = \frac{\pi\omega_1^2}{\lambda R'_1} \quad (35)$$

すなわち, $d_1 < R'_1$ であるから, ビームウエストの位置は幾何光学的な焦点の位置よりも鏡面 #1 に近づくことになる. このとき, ビームウエストからの距離 $d_2 = d_1 + d$ の位置にある #2 反射鏡におけるビーム半径 ω_2 , 波面の曲率半径 R_2 は, 式 (28), (29) より次のようになる.

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\frac{1 + v_2^2}{1 + v_1^2}} = \omega_2 g \sqrt{1 + \left(\frac{1}{u_{1g}}\right)^2} \quad (36)$$

$$R_2 = (d_1 + d) \left(1 + \frac{1}{v_2^2}\right) \quad (37)$$

$$v_2 = v'_1 + \frac{d}{R'_1} \left(v'_1 + \frac{1}{v'_1} \right) \quad (38)$$

ここで、

$$u_{1g} = \frac{\pi \omega_1 \omega_{2g}}{\lambda d} \quad (39)$$

$$\omega_{2g} = \left| \frac{R'_1 + d}{R'_1} \right| \omega_1 \quad (40)$$

である。ω_{2g} は幾何学的な比例関係から決まる #2 反射鏡位置におけるビーム半径を表しており、式 (36) は、波動的に決定されるビーム半径 ω₂ は幾何光学的に決まるビーム半径 ω_{2g} よりも大きくなることを示している。

これらの関係を用いると、ある反射鏡上のビーム半径 ω₁、波面の曲率半径 R'₁ が分かれば、次の反射鏡に入射するビーム半径 ω₂、波面の曲率半径 R₂ が分かることになる。また、2 枚目の反射鏡が回転二次曲面鏡の場合、この鏡面は、ある曲率半径をもつ球面波を別の曲率半径をもつ球面波に変換する波面変換器と考えることができ、幾何光学を用いると、反射後の反射鏡上のビーム半径 ω'₂、波面の曲率半径 R'₂ は次のようになる。

$$\omega'_2 = \omega_2 \quad (41)$$

$$\frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{f} \quad (42)$$

ここで f は鏡面の焦点距離であり、鏡面から物理的な焦点 F₁, F₂ までの距離 L₁, L'₁ より、次のように求めることができる。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L'_1} \quad (43)$$

なお、L₁, L'₁ は正負の符号を有しており、ビームの進行方向に焦点がある場合は負、ない場合は正の値をとる。これにより、反射鏡アンテナが多数の回転二次曲面鏡で構成されるような場合であっても、順次、反射鏡開口上の電磁界を簡易に計算することができ、波面の波動的振舞いを考慮した鏡面設計が可能になる。

3.2 オフセット複反射鏡アンテナと波面

基本モードを用いた鏡面設計の一例として、図 5 のようなオフセット複反射鏡アンテナの場合について考える。ここで副反射鏡及び主反射鏡の焦点距離 f₁, f₂ を、副反射鏡から焦点 F₁, F₂ までの距離 L₁, L'₁、主反射鏡から焦点 F₂ までの距離 L₂ より、次のように定義する。

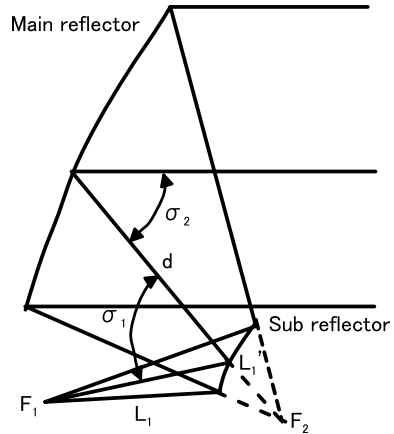


図 5 オフセット複反射鏡アンテナ
Fig. 5 Offset dual reflector antenna.

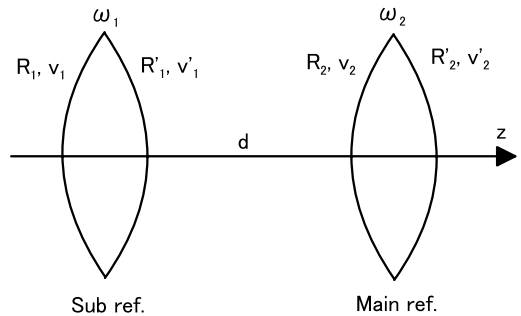


図 6 オフセット複反射鏡アンテナのビームモードパラメータ

Fig. 6 Beam mode parameters of an offset dual reflector antenna.

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{L_1} - \frac{1}{L'_1} \quad (44)$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{L_2} \quad (45)$$

また、図 6 に示すように、副反射鏡の入射波面、反射波面の曲率半径を R₁, R'₁ とすると、次の関係がある。

$$\frac{1}{R'_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L'_1} \quad (46)$$

なお、一次放射器の位相中心が正しく設定されている場合、すなわち、R₁ = L₁ である場合には R'₁ = L'₁ となり、以下、この条件が満足されているものとする。

開口面上では位相誤差が 0、すなわち、主反射鏡からの反射波の波面の曲率半径 R'₂ = ∞ であることが望ましいが、周波数の変化によって位相誤差が生じる。主反射鏡への入射波の波面の曲率半径 R₂ は次式で計算される。

$$R_2 = \frac{\pi\omega_2^2}{\lambda v_2} = \frac{L'_1 + d}{1 + \frac{L'_1}{d(1 + u_{1g}^2)}} \quad (47)$$

これより、主反射鏡の開口面上の波面の曲率半径 R'_2 は式 (42) を用いると次式で表される。

$$\frac{1}{R'_2} = \left(\frac{1}{L'_1 + d} - \frac{1}{L_2} \right) + \frac{L'_1}{(L'_1 + d)d(1 + u_{1g})} \quad (48)$$

幾何光学的な設計では第 1 項が 0 になる。波動的な効果を入れた場合、式 (48) より明らかなように、 L_2 を所定の周波数で $1/R'_2 = 0$ となるように定めるのが適当であり、その値は、 $L'_1 + d$ より少し小さくなる。

また、副反射鏡及び主反射鏡の鏡面上のビーム半径 ω_1, ω_2 が与えられたときのビームモードの定数として

$$u_1 = \frac{\pi\omega_1\omega_2}{\lambda d} \quad (49)$$

を定義する。なお、 u_1 は式 (39), (40), 及び式 (36) を用いると次のように表すこともできる。

$$u_1 = \frac{\pi\omega_1\omega_{2g}}{\lambda d} \frac{\omega_2}{\omega_{2g}} = u_{1g} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{u_{1g}} \right)^2} \quad (50)$$

このとき、式 (38) 及び (36) を用いると次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} 1 + v_2^2 &= (1 + v_1'^2) \left[1 + 2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{v_1'}{u_1} + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{v_1'}{u_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{1}{u_1} \right)^2 \right] \\ &= (1 + v_2^2) \frac{1}{u_1^2} \left[\left(v_1' + \frac{\omega_1}{\omega_2} u_1 \right)^2 + 1 \right] \end{aligned} \quad (51)$$

すなわち、

$$\left(v_1' + \frac{\omega_1}{\omega_2} u_1 \right)^2 + 1 = u_1^2 \quad (52)$$

であり、これより v_1' が決まり、その結果を式 (38) に代入して整理すると v_2 が求まる。

$$v_1' = -\frac{\omega_1}{\omega_2} u_1 + \epsilon_1 \sqrt{u_1^2 - 1} \quad (53)$$

$$v_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} u_1 - \epsilon_1 \sqrt{u_1^2 - 1} \quad (54)$$

ここで、 ϵ_1 は ± 1 である。式 (53) より、 ω_1, ω_2, d が与えられたとき、それを実現するビームモードは ϵ_1

の符号によって 2 種類存在する。すなわち、

$$\epsilon_1 \sqrt{u_1^2 - 1} = v_1' + \frac{\omega_1}{\omega_2} u_1 \quad (55)$$

$$= \frac{\pi\omega_1^2}{\lambda} \left(\frac{1}{L'_1} + \frac{1}{d} \right) \quad (56)$$

であり、式より明らかなように、カセグレンアンテナの場合 $\epsilon_1 = 1$ 、グレゴリアンアンテナの場合 $\epsilon_1 = -1$ である。なお、オフセット複反射鏡アンテナにおいては $L'_1 + d > 0$ であるから、 ϵ_1 を用いると式 (40) は次のようになる。

$$\omega_{2g} = \epsilon_1 \frac{R'_1 + d}{R'_1} \omega_1 = \epsilon_1 \frac{L_2}{L'_1} \omega_1 \quad (57)$$

3.3 オフセット複反射鏡アンテナと交差偏波

オフセット複反射鏡アンテナでは、副反射鏡から発生する交差偏波成分を主反射鏡から発生する交差偏波成分によって打ち消すことにより、幾何光学的に交差偏波の発生を消去できることが知られている。ここでは、基本モードを用いて、波動的観点から交差偏波について考察する。図 5 のようなオフセット複反射鏡アンテナの場合、交差偏波成分の最大値 C は次式で求められる [6]。

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}e} |X| \quad (58)$$

$$|X| = \left| \tan \frac{\sigma_1}{2} \frac{\omega_1}{f_1} e^{j\theta_1} + \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{\omega_2}{f_2} \right| \quad (59)$$

$$= \left| \tan \frac{\sigma_1}{2} \frac{\omega_1}{f_1} + \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{\omega_2}{f_2} e^{-j\theta_1} \right| \quad (60)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} v_2 - \tan^{-1} v_1' \quad (61)$$

式 (59) において、第 1 項が副反射鏡から発生する交差偏波成分を、第 2 項が主反射鏡から発生する交差偏波成分を表している。前述したように、副反射鏡で発生した交差偏波成分の位相は正偏波成分の位相に対して、 d だけ離れた主反射鏡に至るまでに式 (61) で表される θ_1 だけ変化するのに対し、主反射鏡から発生する交差偏波成分については、主反射鏡開口がビームウエストであるから正偏波成分と同相になる。その結果、副反射鏡から発生する交差偏波成分と主反射鏡から発生する交差偏波成分の間には、主反射鏡開口上で θ_1 の位相差を生じることになる。幾何光学的には $v_1' = \pm\infty$ (符号は ϵ_1 と同じ)、 $v_2 = \infty$ となるため $e^{-j\theta_1} = \epsilon_1$ となり、また、 ω_2 を式 (57) で与えられる幾何光学的に決まる値 ω_{2g} に置き換えると、式 (58)

は結局、次のようになる．

$$C_{go} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2e}} \left| \tan \frac{\sigma_1}{2} \frac{1}{f_1} + \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{1}{L'_1} \right| \quad (62)$$

したがって、うまく設計パラメータを選べば $X = 0$ とすることが可能であり、この条件は幾何光学的交差偏波消去条件として知られている．一方、波動的には、上記位相差が生じるために式 (60) の第 2 項が複素数となり、交差偏波成分を消去することはできない．以下、詳細に検討する．

$\tan^{-1} v_n (n = 1, 2)$ は $[-\pi/2, \pi/2]$ の値をとるので、

$$\cos(\tan^{-1} v_n) = \frac{1}{\sqrt{1+v_n^2}} \quad (63)$$

$$\sin(\tan^{-1} v_n) = \frac{v_n}{\sqrt{1+v_n^2}} \quad (64)$$

と表すことができる．これより、

$$\begin{aligned} \cos(\tan^{-1} v_2 - \tan^{-1} v'_1) \\ = \frac{1 + v_2 v'_1}{\sqrt{1+v_2^2} \sqrt{1+v_1'^2}} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \sin(\tan^{-1} v_2 - \tan^{-1} v'_1) \\ = \frac{v_2 - v'_1}{\sqrt{1+v_2^2} \sqrt{1+v_1'^2}} \end{aligned} \quad (66)$$

これに式 (53), (54) の結果を代入すると次式が得られる．

$$\cos(\theta_1) = \frac{\epsilon_1 \sqrt{u_1^2 - 1}}{u_1} \quad (67)$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{1}{u_1} \quad (68)$$

$$\exp(-j\theta_1) = \frac{\epsilon_1 \sqrt{u_1^2 - 1} - j}{u_1} \quad (69)$$

これより、式 (58) は次のようになる．

$$C = |C_R - jC_I| \quad (70)$$

$$\begin{aligned} C_R &= \frac{1}{\sqrt{2e}} \left(\tan \frac{\sigma_1}{2} \frac{\omega_1}{f_1} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_1 \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{\omega_2}{f_2} \frac{\sqrt{u_1^2 - 1}}{u_1} \right) \\ &= \frac{\omega_1}{\sqrt{2e}} \left(\tan \frac{\sigma_1}{2} \frac{1}{f_1} + \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{1}{L'_1} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

$$C_I = \frac{1}{\sqrt{2e}} \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{\omega_2}{f_2} \frac{1}{u_1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2e}} \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{1}{L_2} \frac{\lambda d}{\pi \omega_1} \quad (72)$$

これより明らかなように、オフセット複反射鏡アンテナでは C_I を 0 にすることができないため、完全に交差偏波成分を消去する系は存在しない．また、 $|C_R|$ は式 (62) で与えられる幾何光学的に求めた C_{go} と一致する．この式には λ が含まれないため、 $C_R = 0$ が幾何光学的な交差偏波消去条件となり、次式で表される．

$$\tan \frac{\sigma_1}{2} \frac{1}{f_1} + \tan \frac{\sigma_2}{2} \frac{1}{L'_1} = 0 \quad (73)$$

このときに実現できる交差偏波成分は C_I となり、これは、周波数が高くなり、 d が小さく、 ω_1 、すなわち副反射鏡が大きくなるに従って小さくなる．

なお、3 枚以上の反射鏡を用いることにより、波動的にも交差偏波成分が発生しない系が存在することが示されている [11], [12] ことを付け加えておく．

4. む す び

波面と鏡面をテーマに、幾何光学的及び波動的観点から論じた．本論文に示した知見のほとんどは世の中で知られているものであるが、従来のものとは別の観点から論じることにより、定性的に理解しやすい新しい関係式を提供できたと考えている．

幾何光学的検討においては、鏡面の反射の法則と光路長一定の法則とは独立の条件ではないために一方のみを使用して鏡面設計をすることになること、一般には鏡面の反射の法則を用いた設計がよくなされているが光路長一定の法則を用いて波面を設計の方が設計が簡単になる場合があることを示した．ただし、後者によって実際に鏡面設計した例は少なく、今後の適用に期待したい．

一方、波動的検討においては、ビームモードの基本モードを用いて鏡面と波面、ビーム半径、交差偏波を簡単な関係式によって示すとともに、その定性的な意味についても述べた．この手法は複数の回転二次曲面鏡で構成される反射鏡アンテナの設計には極めて有効であるが、基本モード自体が回転対称なガウス分布を振幅分布とする球面波であるため、鏡面修整した鏡面系や鏡面の焦点からオフセット給電したマルチビームアンテナなどにはそのまま適用することはできない．オフセット給電したパラボラアンテナのビーム偏向特性を基本モードを用いて論じ、その特性を表す簡易な式を導出した例としては文献 [13] があるが、鏡面修整した鏡面系については今後の課題としたい．

文 献

- [1] A.S. Dunbar, "Calculation of doubly curved reflectors for shaped beams," Proc. IRE, vol.36, pp.1289-1296, Oct. 1938.
- [2] A. Brunner, "Possibilities of dimensioning doubly curved reflectors for azimuth-search radar antennas," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-19, no.1, pp.52-57, Jan. 1971.
- [3] 野本真一, "2重曲面反射鏡理論の一般化による曲率を有する扇形ビームの合成," 信学論(B), vol.J86-B, no.9, pp.1886-1894, Sept. 2003.
- [4] G. Goubau and F. Scherwing, "On the guided propagation of electromagnetic wave beams," IRE Trans. Antennas Propag., vol.AP-9, pp.248-256, 1961.
- [5] M.J. Gans, "Cross polarization in reflector type beam waveguides and antennas," Bell Syst. Tech. J., vol.55, no.3, pp.289-316, 1976.
- [6] 片木孝至, 浦崎修治, 蛭井井貴, 別段信一, "集束ビーム給電系のビームモード展開による解析および設計法," 信学論(B), vol.J66-B, no.3, pp.305-312, March 1983.
- [7] 田中宏和, 水沢丞雄, "オフセット複反射鏡アンテナにおける交差偏波の消去," 信学論(B), vol.58-B, no.12, pp.643-650, Dec. 1975.
- [8] 水口芳彦, 赤川正孝, 横井 寛, "オフセットグレゴリアンアンテナ," 信学論(B), vol.J61-B, no.3, pp.166-173, March 1978.
- [9] T. Katagi and Y. Takeichi, "Shaped-beam horn-reflector antennas," IEEE Trans., Antennas Propag., vol.AP-23, no.6, pp.757-763, Nov. 1975.
- [10] 安達忠治, 微分幾何学概説, pp.81-83, 培風館, 1976.
- [11] 古野孝允, 浦崎修治, 片木孝至, "波動的交差偏波消去条件を満足する三枚反射鏡オフセットアンテナ," 信学論(B-II), vol.J78-B-II, no.9, pp.585-592, Sept. 1995.
- [12] 古野孝允, 浦崎修治, 片木孝至, 生野浩正, "多重反射鏡オフセットアンテナの波動的交差偏波消去条件," 信学論(B), vol.J83-B, no.11, pp.1577-1586, Nov. 2000.
- [13] 宮原典夫, 牧野 滋, 浦崎修治, 別段信一, "ビームモード展開法によるオフセットパラボラアンテナのビーム偏向特性の解析," 信学論(B-II), vol.J80-B-II, no.11, pp.953-962, Nov. 1997.

(平成 20 年 1 月 15 日受付, 4 月 18 日再受付)



牧野 滋 (正員)

昭 52 京大・工・電気第二卒。同年, 三菱電機(株)に入社。地上マイクロ波回線用アンテナ, レーダ用アンテナ, 地球局用アンテナ, 衛星搭載用アンテナなどの研究に従事。同社情報技術総合研究所アンテナ技術部長を経て平 18 年金沢工大教授。昭 62, 平 8, 平 9, 平 10 関東地方発明表彰発明奨励賞, 平 10 R&D100 賞, 平 17 第 16 回電波功績賞電波産業会会長表彰, 平 18 市村産業賞貢献賞など受賞。IEEE Senior member。工博。



片木 孝至 (正員:フェロー)

昭 38 京大・工・電気卒。同年, 三菱電機(株)に入社。地上マイクロ波回線用アンテナ, レーダ用アンテナ, 地球局用アンテナ, 衛星搭載用アンテナなどの研究に従事。同社電子システム研究所所長, 情報技術総合研究所所長を経て平 12 年金沢工大教授。昭 41 後期福田賞, 昭 61 本会業績賞, 昭 53 恩賜発明賞, 平 6 全国発明賞, 平 9 科学技術功労者表彰など受賞。IEEE Fellow。工博。