

## 相関のある細矢の M 分布に従う 2 変量の結合確率分布

真鍋 武嗣<sup>†</sup>      中條 渉<sup>††</sup>

Bivariate Joint Probability Distribution for Correlated M-Distributed Variables

Takeshi MANABE<sup>†</sup> and Wataru CHUJO<sup>††</sup>

あらまし 10 GHz 以上の無線回線の降雨減衰の推定のための降雨強度や降雨減衰の確率分布のモデルとして、Moupfouma 分布を簡略化して数学的な取扱いを容易にした細矢の M 分布が、短時間率の強降雨域を含めて広い確率領域で良い近似を与えるモデルとして提案されよく用いられているが、この分布について各種ダイバーシチ特性の計算に必要な多変量の結合確率分布の計算法はこれまで知られていなかった。本論文では、この細矢の M 分布について、2 分岐のダイバーシチ特性の計算の基礎となる、相関のある 2 変量の結合確率分布の計算法を示す。更にこれを降雨のべき乗に比例する降雨減衰に適用するために、これらの 2 変量の相関関数が既知の場合に、これらの 2 変量のべき乗の相関関数と結合確率分布を一般的に求める方法を示す。

キーワード 降雨減衰, M 分布, 結合確率分布, 降雨減衰推定法, ダイバーシチ

### 1. ま え が き

10 GHz 以上の無線回線設計においては、降雨による減衰が大きな問題となる。このため信頼性の高い無線回線を経済的に設計するためには、回線設置地域における降雨減衰確率を統計的に精度良く推定する必要があり、降雨強度や降雨減衰の確率分布をモデル化した種々の推定法が提案されている。このような降雨強度及び降雨減衰の確率分布として、従来、時間率の大きな領域では対数正規分布が、時間率の小さい領域ではガンマ分布が良い近似を与えるモデルとして広く用いられてきたが、更に、通信回線の設計で問題となる強降雨強度・短時間率領域を含めて広い累積時間領域にわたって降雨強度の統計累積分布をよく近似する分布として Moupfouma 分布 [1], [2] が知られている。しかしながら、Moupfouma 分布は分布の平均値や分散と分布パラメータの関係を容易に計算できないことなどから、降雨減衰推定法として用いる際の数学的取扱

いに難点がある。そこで、Moupfouma 分布の分布パラメータのうちの一つを固定として簡略化することにより数学的取扱いを容易にした M 分布が細矢により提案されており [3]、我が国をはじめ世界各地の降雨について、強降雨強度・短時間率領域を含めて広い累積時間領域にわたって Moupfouma 分布に比べてあまり遜色のない良い精度で降雨強度分布を近似でき、降雨減衰累積分布の推定に有効に用いることができることが示されている [4] ~ [6]。

この細矢の M 分布を、地上回線や衛星回線における各種のダイバーシチ特性の推定に用いようとする場合、相関のある多変量の結合確率分布が必要となる。対数正規分布については多変量の結合確率分布はよく知られており、ガンマ分布についても多変量の結合確率分布の一般的な数学的な表現が文献 [7] などで与えられているが、細矢の M 分布については多変量の結合確率分布はこれまで知られていない。そこで、本論文では、細矢の M 分布について、2 分岐のダイバーシチ特性の計算の基礎となる、相関のある 2 変量の結合確率分布の計算法について示す。更に、降雨減衰係数は降雨強度のべき乗に比例することから、相関のある 2 変量の相関係数が既知の場合に、これらの 2 変量のべき乗の相関係数と結合確率分布を一般的に求める方法を示す。

<sup>†</sup> 大阪府立大学大学院工学研究科航空宇宙工学分野, 堺市  
Department of Aerospace Engineering, Graduate School,  
Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuencho, Naka-ku,  
Sakai-shi, 599-8531 Japan

<sup>††</sup> 名城大学理工学部電気電子工学科, 名古屋市  
Department of Electrical and Electronic Engineering, Fac-  
ulty of Science and Technology, Meijo University, 1-501  
Shiogamaguchi, Tenpaku-ku, Nagoya-shi, 468-8502 Japan

## 2. 細矢の M 分布

$x$  を変量とする細矢の M 分布 [3] の確率密度関数は、次式で与えられる Moupfouma 分布 [1], [2]

$$f_{mp}(x) = \frac{p}{x} e^{-ux} \left( \frac{b}{x} + u \right) \quad (1)$$

において、パラメータ  $b$  を  $b = 1$  とおいた

$$f(x) = \frac{p}{x} e^{-ux} \left( \frac{1}{x} + u \right) \quad (2)$$

で与えられ、その確率分布 (累積分布) 関数  $F(x)$  は

$$F(x) = \int_x^\infty f(x') dx' = \frac{p}{x} e^{-ux} \quad (3)$$

で与えられる。ここで変量  $x$  の変域は  $(x^* \leq x < \infty)$  であり、 $x^*$  は  $F(x^*) = 1$  の条件より、超越方程式

$$p = x^* \exp(ux^*) \quad (4)$$

の解として与えられる。M 分布に従う変量  $x$  の平均値を  $m$ 、分散を  $\sigma^2$  とすると、 $u, p, x^*$  と  $m, \sigma$  の間には次のような関係がある [3]。

$$u = \frac{2x^*}{\sigma^2 + m^2 - x^{*2}}, \quad (5)$$

$$x^* = \sigma g(t), \quad (6)$$

$$t = \frac{m}{\sigma}. \quad (7)$$

ここで、 $g(t)$  は変動係数 ( $\delta = \sigma/m$ ) の逆数  $t = m/\sigma$  の関数であり、 $g(t)$  の  $0.01 \leq t \leq 1$  及び、 $0.01 \leq t \leq 3$  における近似式が、それぞれ文献 [3] 及び [6] に与えられている。式 (4) ~ (7) から分かるように、変量  $x$  の平均値  $m$  と標準偏差  $\sigma$  が与えられると、細矢の M 分布は一意的に決定できる。

## 3. 相関のある二つの細矢 M 変量の結合確率分布

正規分布以外の確率分布に従う 2 変量の結合確率分布を求める方法として、与えられた確率分布を Rosenblatt 変換 [8], [9] を用いて正規分布に写像することにより結合確率分布を求める方法が、土木工学の分野における信頼性解析などの分野で用いられている [10]。本論文では、この方法を用いて、相関のある細矢の M 分布に従う 2 変量の結合確率分布を導出する。

細矢の M 分布  $f_i(x_i)$  に従う確率変量  $x_i$  を等価標

準正規分布変量  $z_i$  に変換する Rosenblatt 変換 [8], [9] を次式で定義する。

$$z_i = \Phi^{-1}[F'_i(x_i)]. \quad (8)$$

ここで、

$$F'_i(x_i) = 1 - F_i(x_i) = \int_{x_i^*}^{x_i} f_i(x) dx \quad (9)$$

であり、 $\Phi(z_i)$  は、等価標準正規分布

$$\phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2} \quad (10)$$

に関して次式で定義される標準正規確率分布関数である。

$$\Phi(z_i) = \int_{-\infty}^{z_i} \phi(z) dz \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (12)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{z_i}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (13)$$

ただし、 $\operatorname{erf}(x)$  は誤差関数である。したがって、

$$z_i = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} [2F'_i(x_i) - 1] \quad (14)$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} [1 - 2F_i(x_i)] \quad (15)$$

$$= \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left( 1 - 2 \frac{p_i}{x_i} e^{-u_i x_i} \right) \quad (16)$$

である。ただし  $\operatorname{erf}^{-1}(x)$  は逆誤差関数である。

細矢の M 分布に従う互いに相関のある 2 変量  $x_1, x_2$  にそれぞれ Rosenblatt 変換を行うことにより、相関のある等価結合標準正規変量  $z_1, z_2$  に変換できるとすると、 $x_1, x_2$  の結合確率密度関数  $f(x_1, x_2)$  は、次式で表すことができる。

$$f(x_1, x_2) = \phi(z_1, z_2, \rho_z) \frac{f_1(x_1) f_2(x_2)}{\phi(z_1) \phi(z_2)} \quad (17)$$

ここで、 $\phi(z_1, z_2, \rho_z)$  は、 $z_1, z_2$  の従う等価結合標準正規確率密度関数

$$\phi(z_1, z_2, \rho_z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_z^2}} \exp \left[ -\frac{z_1^2 - 2\rho_z z_1 z_2 + z_2^2}{2(1 - \rho_z^2)} \right] \quad (18)$$

であり、 $\rho_z$  は  $z_1$  と  $z_2$  の相関係数

$$\rho_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 \phi(z_1, z_2, \rho_z) dz_1 dz_2 \quad (19)$$

である．ここで，結合確率分布が結合確率密度関数  $f(x_1, x_2)$  で与えられる細矢 M 変量  $x_1$  と  $x_2$  の間の相関係数  $\rho$  は

$$\rho = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \int_{x_1^*}^{\infty} \int_{x_2^*}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (20)$$

ただし， $m_1, m_2$  及び  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  は，それぞれ  $x_1, x_2$  の平均値及び分散である．ここで，式 (20) に，式 (17) を代入し，Rosenblatt 変換 (8) により積分変数を変換することにより次式が得られる．

$$\rho = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F_1^{-1}(1 - \Phi(z_1)) - m_1] [F_2^{-1}(1 - \Phi(z_2)) - m_2] \phi(z_1, z_2, \rho_z) dz_1 dz_2 \quad (21)$$

したがって， $x_1, x_2$  の相関係数  $\rho$  が与えられている場合，式 (21) から対応する等価結合標準正規分布の相関係数  $\rho_z$  を求めることができれば  $x_1, x_2$  の結合確率分布を式 (17) により計算することができる [10]．ここで，式 (21) の右辺の被積分関数の計算法の詳細については付録 1. に示した．

しかし，細矢の M 分布の場合も含め一般に，与えられた 2 変量の相関係数  $\rho$  から  $\rho_z$  を解析的に求めることは困難である．一方，式 (21) の右辺は  $x_i$  の変動係数  $\delta_i = \sigma_i/m_i$  またはその逆数である  $t_i = 1/\delta_i$  と  $\rho_z$  のみの関数であることを示すことができるので (付録 1. 参照)， $t_1, t_2$  と  $\rho_z$  の種々の値について  $\rho$  を数値計算によって求めることにより，文献 [10] と同様に次式で定義される  $F$

$$F \equiv \rho_z / \rho \quad (22)$$

を， $\rho$  及び  $t_1, t_2$  の関数として表現する近似式を求めておき，この式から算出された  $\rho_z$  を用いて， $x_1, x_2$  の結合確率分布を式 (17) から求めることができる．

### 3.1 2 変量の変動係数が等しい場合 ( $\delta_1 = \delta_2$ )

まず，2 変量の変動係数  $\delta_1, \delta_2$  が等しい場合を考える．これはダイバーシチ計算の中で考慮する 2 地点の降雨強度の統計的分布 (細矢の M 分布の場合，平均値  $m$  と分散  $\sigma^2$  が与えられると一意的に決定される) が完全に一致する場合に相当する．この場合， $\delta \equiv \delta_1 = \delta_2$ ， $t \equiv t_1 = t_2$  とし， $\rho = 1$  のときに  $\rho_1 = 1$  となることから，式 (21) で与えられる  $F$  を， $\rho$  と  $t$  の関数として

表 1 2 変量の変動係数が等しい場合 ( $\delta_1 = \delta_2$ ) の式 (23) の係数  $b_i$  と近似誤差

Table 1 The coefficients  $b_i$  and the approximation errors of Eq. (23) for the cases when the two probability variables are equal.

	$0.2 \leq \rho \leq 1$	
	$0.02 \leq t \leq 0.3$	$0.3 \leq t \leq 3$
$b_1$	$-0.868212896 \times 10^{+0}$	$-0.823690626 \times 10^{+0}$
$b_2$	$-0.222195340 \times 10^{-1}$	$-0.112754582 \times 10^{+0}$
$b_3$	$0.158723437 \times 10^{+1}$	$0.868584479 \times 10^{+0}$
$b_4$	$-0.169824917 \times 10^{+0}$	$-0.484393529 \times 10^{-1}$
$b_5$	$-0.267888706 \times 10^{+0}$	$0.115382536 \times 10^{+0}$
$b_6$	$-0.559847125 \times 10^{+1}$	$-0.506459755 \times 10^{+0}$
$b_7$	$0.268988915 \times 10^{+0}$	$-0.560304632 \times 10^{-1}$
$b_8$	$-0.367165090 \times 10^{+0}$	$0.805291257 \times 10^{-1}$
$b_9$	$0.170389698 \times 10^{+1}$	$-0.659402843 \times 10^{-1}$
$b_{10}$	$0.156444560 \times 10^{+2}$	$0.143091603 \times 10^{+0}$
$b_{11}$	$-0.199168786 \times 10^{+0}$	$-0.811640959 \times 10^{-2}$
$b_{12}$	$-0.986479287 \times 10^{-1}$	$0.305077066 \times 10^{-1}$
$b_{13}$	$0.130280266 \times 10^{+1}$	$-0.286042837 \times 10^{-1}$
$b_{14}$	$-0.401533575 \times 10^{+1}$	$0.138469654 \times 10^{-1}$
$b_{15}$	$-0.164817774 \times 10^{+2}$	$-0.159050181 \times 10^{-1}$
近似誤差	< 0.2%	< 0.3%

$$F = \{1 + (1 - \rho)[b_1 + b_2(1 - \rho) + b_3t + b_4(1 - \rho)^2 + b_5(1 - \rho)t + b_6t^2 + b_7(1 - \rho)^3 + b_8(1 - \rho)^2t + b_9(1 - \rho)t^2 + b_{10}t^3 + b_{11}(1 - \rho)^4 + b_{12}(1 - \rho)^3t + b_{13}(1 - \rho)^2t^2 + b_{14}(1 - \rho)t^3 + b_{15}t^4]\}^{-1} \quad (23)$$

の形で近似することとし，式 (21) の右辺を数値計算することにより求めた  $t, \rho_z$  と  $\rho$  の関係から最小二乗法により，式 (23) の係数  $b_1 \sim b_{15}$  を求める．

$\rho$  の範囲を  $0.2 \leq \rho \leq 1$  として， $0.02 \leq t \leq 0.3$ ， $0.3 \leq t \leq 3$  の場合についてそれぞれ得られた係数  $b_1 \sim b_{15}$  の値を表 1 に示す．ここで， $\rho$  と  $t$  が与えられた場合に近似式 (23) によって得られる等価結合標準正規分布の相関係数  $\rho_z$  の近似値の真値に対する相対誤差を近似誤差と定義すると， $0.02 \leq t \leq 0.3$  の場合の近似誤差は 0.2%以内， $0.3 \leq t \leq 3$  の場合の近似誤差は 0.3%以内である．

### 3.2 2 変量の変動係数が異なる場合 ( $\delta_1 \neq \delta_2$ )

次に，2 変量の変動係数が異なる ( $\delta_1 \neq \delta_2$  すなわち  $t_1 \neq t_2$ ) 一般的な場合を考える．この場合，式 (21) の  $t_1, t_2$  に関する対称性及び， $t_1 = t_2$  の場合， $\rho = 1$  のときに  $\rho_z = 1$  となることなどから， $F$  を  $\rho, t_1, t_2$  の関数として

$$F = \{1 + (1 - \rho)[a_1 + a_2(1 - \rho) + a_3(t_1 + t_2) + a_4(1 - \rho)^2 + a_5(t_1^2 + t_2^2) + a_6t_1t_2]$$

表 2 2 変量の変動係数が異なる場合 ( $\delta_1 \neq \delta_2$ ) の式 (24) の係数  $a_i$  と近似誤差  
 Table 2 The coefficients  $b_i$  and the approximation errors of Eq. (24) for the cases when the two probability variables are not equal.

	$0.2 \leq \rho \leq 1$		
	$0.02 \leq t_1, t_2 \leq 0.3$	$0.1 \leq t_1, t_2 \leq 0.8$	$0.3 \leq t_1, t_2 \leq 3$
$a_1$	$-0.934905697 \times 10^{+0}$	$-0.894024550 \times 10^{+0}$	$-0.884827846 \times 10^{+0}$
$a_2$	$0.194341370 \times 10^{+0}$	$0.131128908 \times 10^{+0}$	$-0.797979309 \times 10^{-1}$
$a_3$	$0.108328964 \times 10^{+1}$	$0.547945038 \times 10^{+0}$	$0.440407644 \times 10^{+0}$
$a_4$	$-0.600769833 \times 10^{+0}$	$-0.370786198 \times 10^{+0}$	$0.252060140 \times 10^{+0}$
$a_5$	$0.218968277 \times 10^{+1}$	$0.385195440 \times 10^{+0}$	$-0.159603264 \times 10^{+0}$
$a_6$	$-0.104660518 \times 10^{+2}$	$-0.146096190 \times 10^{+1}$	$-0.824651644 \times 10^{-1}$
$a_7$	$-0.594527207 \times 10^{+0}$	$-0.228726046 \times 10^{+0}$	$0.147349173 \times 10^{-2}$
$a_8$	$0.806955003 \times 10^{+0}$	$0.352572233 \times 10^{+0}$	$-0.570860557 \times 10^{+0}$
$a_9$	$-0.741056408 \times 10^{+1}$	$-0.478734321 \times 10^{+0}$	$0.218483277 \times 10^{-1}$
$a_{10}$	$0.111313475 \times 10^{+2}$	$0.544256552 \times 10^{+0}$	$0.103835405 \times 10^{-1}$
$a_{11}$	$0.149746857 \times 10^{+1}$	$0.110584446 \times 10^{+0}$	$-0.806993812 \times 10^{-2}$
$a_{12}$	$0.188815596 \times 10^{+0}$	$0.138808684 \times 10^{+0}$	$-0.227230923 \times 10^{-2}$
$a_{13}$	$-0.319286908 \times 10^{-1}$	$0.100090544 \times 10^{+0}$	$0.370200567 \times 10^{-1}$
$a_{14}$	$-0.461362875 \times 10^{+0}$	$-0.224780635 \times 10^{+0}$	$0.279876327 \times 10^{+0}$
$a_{15}$	$-0.111597722 \times 10^{+2}$	$-0.208292225 \times 10^{+1}$	$-0.247014944 \times 10^{+0}$
$a_{16}$	$0.433871166 \times 10^{+2}$	$0.283955920 \times 10^{+1}$	$0.125500664 \times 10^{+0}$
$a_{17}$	$-0.544327626 \times 10^{+2}$	$-0.120135185 \times 10^{+1}$	$-0.185053730 \times 10^{-1}$
$a_{18}$	$-0.731909808 \times 10^{+2}$	$-0.172180531 \times 10^{+1}$	$-0.253897014 \times 10^{-1}$
近似誤差	< 3%	< 1%	< 3%

$$\begin{aligned}
 &+ a_7(1-\rho)(t_1+t_2) + a_8(1-\rho)^3 + a_9(t_1^3+t_2^3) \\
 &+ a_{10}t_1t_2(t_1+t_2) + a_{11}(1-\rho)(t_1^2+t_2^2) \\
 &+ a_{12}(1-\rho)t_1t_2 + a_{13}(1-\rho)^2(t_1+t_2) \\
 &+ a_{14}(1-\rho)^4 + (t_1-t_2)^2[a_{15}+a_{16}(t_1+t_2) \\
 &+ a_{17}(t_1^2+t_2^2) + a_{18}t_1t_2]^{-1} \quad (24)
 \end{aligned}$$

の形で近似することとし、式 (21) の右辺の数値計算により求めた  $t_1, t_2, \rho_z, \rho$  の関係から最小二乗法により、係数  $a_1 \sim a_{18}$  を求める。

$\rho$  の範囲を  $0.2 \leq \rho \leq 1$  として、 $0.02 \leq t_1, t_2 \leq 0.3$ 、 $0.1 \leq t_1, t_2 \leq 0.8$ 、 $0.3 \leq t_1, t_2 \leq 3$  の場合についてそれぞれ得られた係数  $a_1 \sim a_{18}$  の値を表 2 に示す。 $0.02 \leq t_1, t_2 \leq 0.3$  の場合及び  $0.3 \leq t_1, t_2 \leq 3$  の場合の近似誤差は 3%以内であり、 $0.1 \leq t_1, t_2 \leq 0.8$  の場合の近似誤差は 1%以内である。2 分岐のダイバーシチ計算をする場合に、ダイバーシチブランチの  $t$  が異なる場合、一つのモデル [式 (24)] で  $F$ 、すなわち相関係数、が表現できる必要がある。一般的なダイバーシチ計算を行う場合に、二つのブランチの  $t$  が大きく異なることはあまりないと考えられるが、表 2 の  $t$  の領域に重なりがない場合、 $t_1$  と  $t_2$  が領域の境界をまたがっている場合、相関係数の計算ができなくなる。このようなことが起こるのをできるだけ避けるために、表 2 の近似モデルの  $t_1, t_2$  の三つの領域の間にある程度の重なりをもたせてある。

#### 4. 相関のある二つの細矢 M 変量のべき乗の結合確率分布

空間的に一樣な降雨を仮定した場合の単位距離当りの降雨減衰量に対応する降雨減衰係数  $\gamma_R$  [dB/km] は良い近似で降雨強度  $R$  [mm/h] のべき乗に比例することが知られており [11]、国際電気通信連合無線通信セクタ (ITU-R) では勧告 Rec.P.838-3 [12] においてこの関係を、

$$\gamma_R = kR^\alpha \quad (25)$$

と表現している。ここで、係数  $k$  とべき乗の指数  $\alpha$  は偏波と周波数に依存したパラメータであり、1~1000 GHz の周波数範囲において  $\alpha$  の値の最大値は 1.7 (5 GHz 付近)、最小値は 0.63 (500 GHz 付近) である。

降雨の空間的不一樣性を考慮した、降雨減衰の推定やダイバーシチ特性の推定には、降雨強度の空間相関特性を考慮した降雨減衰係数の結合確率分布すなわち降雨強度の  $\alpha$  乗の結合確率分布が必要である。森田らは降雨強度  $R$  の確率分布がガンマ分布に従う場合に  $R^\alpha$  も近似的にガンマ分布に従うことを示し、空間的に離れた 2 地点の  $R^\alpha$  の空間相関係数を  $R$  の空間相関係数から求める式を導出している [13]。また、井原らは降雨強度  $R$  の確率分布が対数正規分布に従う場合について、空間的に離れた 2 地点の  $R^\alpha$  の結合確率分

布を結合対数正規分布で表せるとして  $R^\alpha$  の空間相関係数を求める式を導出し、これを用いて降雨の空間的不均一性を考慮した降雨減衰を推定する方法を提案している [14] . 一方、細矢の M 分布については、小野らが多地点で観測された 1 分間降雨強度の実測データを用いて  $R^\alpha$  の空間相関係数を実験的に求めている [15] が、降雨強度の空間相関係数から降雨強度の  $\alpha$  乗の空間相関係数を計算する一般的な方法については明らかになっていない . そこで、本章では、細矢の M 分布に従う二つの確率変数  $x_1$  と  $x_2$  の相関係数が既知の場合に、これらの変数のべき乗  $x_1^\alpha$  と  $x_2^\alpha$  の相関係数と結合確率分布を一般的に求める方法を示す .

まず、細矢の M 分布に従う 2 変量  $x_1$  と  $x_2$  の間に相関がある場合、 $x_1^\alpha$  と  $x_2^\alpha$  の相関係数  $\rho_\alpha$  は、式 (17) で与えられる  $x_1$  と  $x_2$  の結合確率密度関数  $f(x_1, x_2)$  を用いて、次式により計算することができる .

$$\rho_\alpha = \frac{1}{\sigma_{\alpha 1} \sigma_{\alpha 2}} \int_{x_1^*}^{\infty} \int_{x_2^*}^{\infty} (x_1^\alpha - m_{\alpha 1})(x_2^\alpha - m_{\alpha 2}) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (26)$$

ここで  $m_{\alpha i}$  と  $\sigma_{\alpha i}^2$  は  $x_i^\alpha$  の平均値と分散であり、 $x_i$  の確率分布が式 (2) の細矢の M 分布  $f(x_i)$  をしていることから

$$m_{\alpha i} = \frac{p_i}{(\alpha - 1)u_i^{\alpha-1}} [\alpha \Gamma(\alpha, u_i x_i^*) - (u_i x_i^*)^{\alpha-1} \exp(-u_i x_i^*)], \quad (i = 1, 2) \quad (27)$$

及び

$$\sigma_{\alpha i}^2 = \frac{p_i}{(2\alpha - 1)u_i^{2\alpha-1}} [2\alpha \Gamma(2\alpha, u_i x_i^*) - (u_i x_i^*)^{2\alpha-1} \exp(-u_i x_i^*)] - m_{\alpha i}^2, \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

により求めることができる . ただし、 $\Gamma(\alpha, x)$  は第 2 種不完全ガンマ関数であり、次式で定義される .

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (29)$$

一例として、東京の 1 分間降雨強度  $x_i$  の累積分布について小野ら [4] によって得られた細矢の M 分布 ( $p_i = 0.030$  [mm/h],  $u_i = 0.022$  [h/mm],  $(i = 1, 2)$ ) を仮定して、種々の  $\alpha$  の値について、式 (26) ~ (28) に

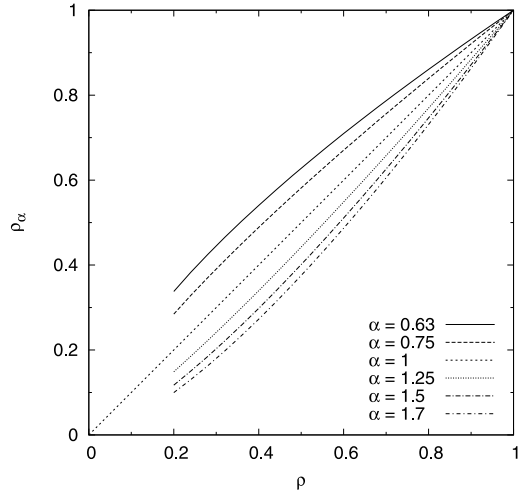


図 1 細矢の M 分布 ( $p_i = 0.030$  [mm/h],  $u_i = 0.022$  [h/mm],  $(i = 1, 2)$ ) に従う相関のある 2 変量  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) の相関係数  $\rho$  と変量の  $\alpha$  乗  $x_i^\alpha$  ( $i = 1, 2$ ) の相関係数  $\rho_\alpha$  の関係

Fig. 1 The relationship between the correlation coefficient  $\rho$  of the M-distributed variables  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) and  $\rho_\alpha$  of  $x_i^\alpha$  ( $i = 1, 2$ ), where the parameters of the M-distribution  $p_i$  and  $u_i$  are 0.030 mm/h and 0.022 h/mm, respectively.

より、 $\rho_\alpha$  と  $\rho$  の関係を求めた結果を図 1 に示す .

このようにして細矢の M 分布について得られた式 (26) ~ (28) の公式を用いることにより、対数正規分布について井原等により提案された修正森田・樋口法 [14] と同様の方法で、伝搬路上での降雨強度の空間的不均一性を考慮した降雨減衰統計の推定を行うことができる . 詳細は付録 2. を参照されたい .

次に、細矢の M 分布に従う変量  $x_i$  について、その  $\alpha$  乗の確率分布を考えるために、 $y_i = x_i^\alpha$  とおく . この  $y_i$  は  $\alpha \neq 1$  の場合、厳密には M 分布に従わないが、 $\alpha$  の値が 1000 GHz 以下における降雨減衰係数の降雨べき乗指数に対応する  $0.63 \leq \alpha \leq 1.7$  の場合、非常に良い近似精度で M 分布で近似できることが確認されている [15] . そこで、 $y_i = x_i^\alpha$  とおき、 $y_i$  の分布を近似的に次式で与えられる細矢の M 分布で表すものとする .

$$f_{\alpha i}(y_i) = \frac{p_{\alpha i}}{y_i} e^{-u_{\alpha i} y_i} \left( \frac{1}{y_i} + u_{\alpha i} \right) \quad (30)$$

ただし、 $p_{\alpha i}$  と  $u_{\alpha i}$  は、式 (27) と式 (28) によって得られる  $y_i (= x_i^\alpha)$  の平均値  $m_{\alpha i}$  と分散  $\sigma_{\alpha i}^2$  を式 (4) ~ (7) の  $m$  と  $\sigma^2$  に代入して求められるものとし、 $y_i$  の変域の下限は式 (6) と同様

$$y_i^* = \sigma_{\alpha i} g(m_{\alpha i} / \sigma_{\alpha i}), \quad (31)$$

とする。

ここで、 $f_{\alpha i}$  は、 $f_i$  と同様に、Rosenblatt 変換

$$z_i = \Phi^{-1} \left[ \int_{y_i^*}^{y_i} f_{\alpha i}(y) dy \right]. \quad (32)$$

により等価標準正規分布  $\phi(z_i)$  に変換できるとすると、 $y_1, y_2$  の結合確率密度関数  $f_{\alpha}(y_1, y_2)$  は、式 (17) と同様に、次式により計算することができる。

$$f_{\alpha}(y_1, y_2) = \phi(z_1, z_2, \rho_{\alpha z}) \frac{f_{\alpha 1}(y_1) f_{\alpha 2}(y_2)}{\phi(z_1) \phi(z_2)} \quad (33)$$

ここで、 $\phi(z_1, z_2, \rho_{\alpha z})$  は、 $z_1, z_2$  の従う等価結合標準正規確率密度関数であり  $z_1$  と  $z_2$  の相関係数である  $\rho_{\alpha z}$  は、 $t_i = m_{\alpha i} / \sigma_{\alpha i}$  ( $i = 1, 2$ ) と  $\rho_{\alpha}$  を式 (23) または式 (24) に代入して得られた  $F$  から、

$$\rho_{\alpha z} = F \rho_{\alpha} \quad (34)$$

によって与えられる。

## 5. むすび

細矢の M 分布に従う相関のある 2 変量について、Rosenblatt 変換を施すことにより得られる結合等価標準正規分布を介して、結合確率分布を求める方法を示した。更に、細矢の M 分布に従う 2 変量の相関係数が既知の場合に、これらの変量のべき乗の相関係数と結合確率分布を一般的に求める方法を示した。

これらの関係を利用することにより、降雨強度及び伝搬路における降雨減衰量が細矢の M 分布に従うという仮定のもとに、降雨の空間的不均一性を降雨強度の空間相関特性として考慮することにより、降雨減衰量の確率分布を推定することができる。更に、降雨強度のべき乗の結合確率密度関数を用いることにより、降雨減衰が細矢の M 分布に従う 2 伝搬路のダイバーシチ特性の計算等が可能となる。

本手法は、細矢の M 分布に従う降雨減衰を蒙る地上や衛星の回線の各種ダイバーシチ計算に有効と考えられる。

## 文 献

- [1] F. Moupfouma, "Distribution statistique des intensités de pluie et des affaiblissements dus à la pluie en climat équatorial et tropical," Ann. Telecommun., vol.37, no.3-4, pp.123-128, March-April 1982.
- [2] F. Moupfouma, "Empirical model for rainfall rate distribution," Electron. Lett., vol.18, no.11, pp.460-461, May 1982.
- [3] 細矢良雄, "日本各地の 1 分間雨量分布の一推定法," 信学論 (B), vol.J71-B, no.2, pp.256-262, Feb. 1988.
- [4] 小野健一, 唐沢好男, "気象庁の 1 分間降雨量データを用いた日本各地における 1 分間降雨強度特性と最適な近似モデルに関する考察," 信学論 (B), vol.J89-B, no.3, pp.361-372, March 2006.
- [5] C. Ito and Y. Hosoya, "A worldwide rain attenuation prediction method which uses simplified Moupfouma distribution and regional climatic parameters," Proc. 2002 Interim International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP i-02), Yokosuka, Japan, Nov. 2002.
- [6] 伊藤知恵子, 細矢良雄, "M 分布と地域気候パラメータを用いた世界的な降雨減衰分布推定法の提案," 信学論 (B), vol.J87-B, no.7, pp.979-989, July 2004.
- [7] 野本真一, 岸 洋司, 難波 忍, "M ブランチ選択ダイバーシチ検討のための有相関多変量ガンマ分布関数とその評価," 信学論 (B), vol.J86-B, no.9, pp.1989-1999, Sept. 2003.
- [8] M.R. Rosenblatt, "Remarks on a multivariate transformation," Ann. Math. Statist., vol.23, no.3, pp.470-472, Sept. 1952.
- [9] A.H.-S. Ang and W.H. Tang, Probability Concepts in Engineering and Design: Decision, Risk, and Reliability, Appendix B, John Wiley & Sons, 1964. (伊藤 学, 黒田勝彦, 亀田弘行, 藤野陽三 (訳), 土木・建築のための確率・統計の応用, 丸善, 1981)
- [10] A.D. Kiureghian and P.-L. Liu, "Structural reliability under incomplete probability information," J. Eng. Mech. ASCE, vol.112, no.1, pp.85-104, Jan. 1986.
- [11] R.L. Olsen, D.V. Rogers, and D.H. Hodge, "The  $aR^b$  relation in the calculation of rain attenuation," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-26, no.2, pp.318-329, 1978.
- [12] ITU-R, "Specific attenuation model for rain for use in prediction methods," Recommendation ITU-R P.838-3, ITU, March 2005.
- [13] 森田和夫, 樋口伊佐夫, "降雨による電波の減衰量の推定に関する統計的研究," 研実報, vol.19, no.1, pp.97-150, Jan. 1970.
- [14] T. Ihara, Y. Furuhashi, and T. Manabe, "Modification of Morita and Higuti's prediction method of lognormal rain attenuation distribution by using spatial correlation of specific attenuation," IECE Trans., vol.E69, no.2, pp.139-147, Feb. 1986.
- [15] 小野健一, 唐沢好男, "降雨減衰確率推定手法の精度向上を目的とした降雨強度の  $n$  乗の空間相関特性に関する考察," 信学論 (B), vol.J89-B, no.10, pp.1998-2011, Oct. 2006.

付 録

1.  $\rho$  の数値計算法

式 (21) より

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sigma_1} F_1^{-1}(1 - \Phi(z_1)) - t_1 \right] \left[ \frac{1}{\sigma_2} F_2^{-1}(1 - \Phi(z_2)) - t_2 \right] \phi(z_1, z_2, \rho_z) dz_1 dz_2 \quad (\text{A}\cdot 1)$$

ここで,  $G(x) = \exp(-x)/x$  とおくと

$$F_i(x_i) = p_i u_i G(u_i x_i) \quad (\text{A}\cdot 2)$$

であるので,  $P = F_i(x_i)$  の逆関数  $F_i^{-1}(P)$  は  $G(x_i)$  の逆関数  $G^{-1}(P)$  を用いて

$$F_i^{-1}(P) = \frac{1}{u_i} G^{-1}\left(\frac{P}{p_i u_i}\right) \quad (\text{A}\cdot 3)$$

と表すことができるので

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sigma_1 u_1} G^{-1}\left(\frac{1 - \Phi(z_1)}{p_1 u_1}\right) - t_1 \right] \left[ \frac{1}{\sigma_2 u_2} G^{-1}\left(\frac{1 - \Phi(z_2)}{p_2 u_2}\right) - t_2 \right] \phi(z_1, z_2, \rho_z) dz_1 dz_2 \quad (\text{A}\cdot 4)$$

となる。ここで,  $\sigma_i, p_i, u_i$  の間には

$$\begin{aligned} \sigma_i u_i &= \frac{2x_i^* \sigma_i}{\sigma_i^2 + m_i^2 - x_i^{*2}} \\ &= \frac{2g(t_i)}{1 + t_i^2 - g(t_i)^2} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

$$\begin{aligned} p_i u_i &= \frac{2x_i^{*2}}{\sigma_i^2 + m_i^2 - x_i^{*2}} \exp\left(\frac{2x_i^{*2}}{\sigma_i^2 + m_i^2 - x_i^{*2}}\right) \\ &= \frac{2g(t_i)^2}{1 + t_i^2 - g(t_i)^2} \exp\left(\frac{2g(t_i)^2}{1 + t_i^2 - g(t_i)^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

$$x_i^* = \sigma_i g(t_i) \quad (\text{A}\cdot 7)$$

$$t_i = \delta_i^{-1} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

の関係が成り立つので [3], 式 (21) の右辺は,  $t_1 (= \delta_1^{-1}), t_2 (= \delta_2^{-1})$  及び  $\rho_z$  のみに依存することが分かる。また,  $y = G(x)$  の逆関数  $G^{-1}(y)$  については,  $-15 \leq \ln(y) \leq 8$  の範囲における多項式近似係数が文献 [6] に与えられており, これを用いることにより式 (A・4) の  $\rho$  を数値的に求めることができる。

2. 降雨の空間的不均一性を考慮した降雨減衰の統計的推定法

距離  $L$  の伝搬路における降雨減衰  $A$  は, 伝搬路上の地点  $z$  における降雨減衰係数を  $\gamma(z) (= kR(z)^\alpha)$  とすると次式で与えられる。

$$A = \int_0^L \gamma(z) dz \quad (\text{A}\cdot 9)$$

伝搬路上で降雨の統計的性質が一樣であると仮定し, 降雨強度  $R$  の  $\alpha$  乗の平均値と分散をそれぞれ,  $m_\alpha, \sigma_\alpha^2$  とすると, 降雨減衰  $A$  の平均値  $m_A$  と分散  $\sigma_A^2$  はそれぞれ,

$$m_A = k m_\alpha L \quad (\text{A}\cdot 10)$$

と

$$\sigma_A^2 = 2k^2 \sigma_\alpha^2 \int_0^L (L - z) \rho_\alpha(z) dz \quad (\text{A}\cdot 11)$$

により求められる。ただし,  $\rho_\alpha(z)$  は伝搬路上で距離  $z$  だけ離れた 2 地点間の降雨強度  $R$  の  $\alpha$  乗の相関係数である。  $R$  の確率分布が式 (2), (3) の細矢の M 分布で与えられている場合, 4. で述べたように,  $R^\alpha$  も良い精度で細矢の M 分布に従うことが小野らにより確認されており [15], この  $R^\alpha$  に比例する降雨減衰係数を伝搬距離  $L$  にわたって積分して得られる降雨減衰量  $A$  についてもその確率分布が細矢の M 分布でよく近似できることが世界各地における地上回線降雨減衰実測データのデータバンクによって確認されている [6]。そこで, 式 (A・9) で与えられる降雨減衰量  $A$  の分布が近似的に細矢の M 分布に従うと仮定するとその確率密度関数と累積分布は, 式 (4) ~ 式 (7) の  $m, \sigma$  にそれぞれ  $m_A, \sigma_A$  を代入して得られる  $p, u, x^*$  を式 (2) と式 (3) に代入することにより得られる。

(平成 20 年 5 月 19 日受付, 6 月 30 日再受付)



真鍋 武嗣 (正員:フェロー)

昭 50 京大・工・電子卒, 昭 55 同大学院博士課程了. 同年郵政省電波研究所(現,(独)情報通信研究機構)入所. 以来, マイクロ波・ミリ波帯の電波伝搬・リモートセンシング, ミリ波通信システムの研究開発に従事. 昭 61~62 米国商務省電気通信情報局電気通信科学研究所 (NTIA/ITS) 客員研究員. 昭 63~平 3 (株) ATR 光電波通信研究所に出向. 平 17 より, 阪府大院工学研究科航空宇宙海洋系専攻航空宇宙工学分野教授. 宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究本部プロジェクト共同研究員. 主に, 国際宇宙ステーション JEM 暴露部搭載超伝導サブミリ波リム放射サウンダの研究開発などに従事. 昭 59 本会学術奨励賞受賞. 工博. 日本学術会議 URSI-F 委員会委員. IEEE 会員.



中條 涉 (正員)

昭 53 東北大・工・通信卒, 昭 55 同大学院修士課程了, 同年郵政省電波研究所(現(独)情報通信研究機構)入所. 以来, 衛星搭載用アクティブアレーアンテナの研究に従事. 昭 64~平 5 (株) ATR 光電波通信研究所に出向. 平 9~11 東北大・電気通信研究所・助教授. 平 14~16 通信総研アジア研究連携センター長, 平 16~18 情報通信研究機構鹿島宇宙通信研究センター長. 平成 20 年より名城大学理工学部電気電子工学科教授. 移動体衛星通信用アクティブアレーアンテナや光制御アレーアンテナ等の研究に従事. 昭 62 本会学術奨励賞, 工博, IEEE 会員.