

# 平面層状不均質媒質に対するダイアドックグリーン関数の簡略化と無損失 DNG スラブへの応用

宇野 亨<sup>†a)</sup>

Simplification of Dyadic Green's Function for Plane Stratified Inhomogeneous Media and Its Application to Lossless DNG Slab

Toru UNO<sup>†a)</sup>

あらまし メタマテリアル (Metamaterial) は今までに知られていない新しい物理的特性をもつことから最近注目を集めている。特に誘電率と透磁率がともに負の値をもつ DNG (Double Negative) 媒質は、その作成法が明らかになったことからマイクロ波コンポーネントやアンテナに応用されつつある。そこで本論文では、DNG メタマテリアルをマイクロストリップアンテナや RFID (Radio Frequency Identification) に代表される平面構造を有するアンテナに応用することを目的に、その基本特性を知る上で重要となるダイアドックグリーン関数の新しい表現法を導出する。平板状媒質に対するダイアドックグリーン関数は従来円柱座標に対するベクトル波動関数の級数和など、いくつかの表現が提案されているが、数値計算などを考えると必ずしも便利な表現ではない。本論文では、このグリーン関数を方形アンテナや任意の直線状アンテナの解析に便利のように直角座標表現に変換し、これをもとに DNG スラブ近傍アンテナの基本的な性質を検討する。なお、ダイアドックグリーン関数を導出する際には、一般性をもたせるために深さ方向に不均質とする。また、電気壁あるいは磁気壁がある場合についても検討する。

キーワード ダイアドックグリーン関数、不均質媒質、メタマテリアル、DNG スラブ

## 1. ま え が き

メタマテリアル (Metamaterial) は今までにない新しい物理特性をもつことから最近注目を集めている [1] ~ [6]。メタマテリアルとは、誘電体、磁性体あるいは周期構造の金属から構成される人工媒質であり、フォトニックバンド構造 [2]、誘電率と透磁率がともに負になる DNG (Double Negative) 媒質 (NIM: Negative Index Material (Medium), LHM: Left Handed Material (Medium) あるいは NIR: Negative Index of Refraction Material (Medium) とも呼ばれる) [1], [3] ~ [6]、あるいはキラル媒質 [7] などのもその一種である。すなわち、メタマテリアルとは等価的な比誘電率、比透磁率が等方性あるいは異方性を示す媒質で、その要素は任意の値をとり得る媒質の

ことであるともいえる。これに対して通常の等方性媒質の比誘電率、比透磁率は 1 以上の値をとる。

メタマテリアルの中でも特に DNG (あるいは LHM) は比較的容易に実現できることからマイクロ波コンポーネントや漏れ波アンテナ等に応用されている [8] ~ [11]。そこで本論文では、DNG 媒質をアンテナの分野に応用する際の基本的な電磁界特性を調べるために、誘電率も透磁率もともに任意の値をとる平面層状媒質に対するダイアドックグリーン関数の直角座標表現を導出し、これをもとに DNG スラブ近傍アンテナの基本的な性質について検討する。なお、ダイアドックグリーン関数を導出する際には、一般性をもたせるために媒質は深さ方向に不均質とする。また、導体地板の問題に応用できるように、電気壁や磁気壁がある場合についても検討する。

このような平板状媒質に対する電磁界問題は、マイクロストリップアンテナや RFID (Radio Frequency Identification) に代表される平面アンテナの特性を知る上で基本となる重要な問題であり、Sommerfeld [12]

<sup>†</sup> 東京農工大学大学院, 小金井市

Graduate School of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology, Koganei-shi, 184-8588 Japan

a) E-mail: t-uno@m.ieice.org

の先駆的研究以降、極めて多くの研究報告がなされている [13], [14]。紙面の都合でそれらすべてを解説することはできないが、この問題の基本となるダイアディックグリーン関数の導出方法あるいはそれに基づく表現方法としては主に、ベクトルモード関数を用いるもの [15] ~ [17], Sturm-Liouville 理論に基づく固有関数 (モード関数) 展開を一次元のスカラー特性グリーン関数表現に置き換えるもの [16], [18], [19], 及び媒質境界に平行な面で (あるいは深さ方向も含めて) フーリエ変換する方法があり [20] ~ [22], スペクトル領域法とも呼ばれている。この方法は平面アンテナの問題に広く応用されているが [23], 電磁界の特性を求めるには基本的に二次元の逆フーリエ変換が必要になる。第 2 の方法は最近ダイアディック固有関数表現へと拡張された [24]。これらの方法は、主に均質媒質、あるいは地板付き均質媒質に適用されているが、これを均質多層媒質に拡張しようとする、深さ方向の表現が複雑になる。このため、数値計算の効率化や物理的解釈の容易さを目的に、いくつかの別表現が提案されている [17], [25] ~ [28]。しかし、一般の不均質媒質の表現方法を扱った報告は見当たらない。これに対してベクトル波動関数を用いた表現方法では、比透磁率が 1 の特別な場合であるが深さ方向のスカラー関数の満たすべき微分方程式が既に与えられていること [15], 本論文の目的の一つは DNG 媒質の一般的な性質を通常の媒質と比較しながら明らかにすることであること、第 2, 第 3 の方法では深さ方向のスカラー関数を伝送線路モデル等で構成するため、不均質媒質に拡張できたとしても媒質定数が特性インピーダンスや反射係数として現れ、媒質の性質による特性の相違を抽出するためには複雑な取扱いが必要になるであろうと予想されること等を考慮し、ベクトル波動関数表現に基づいて検討することとした。ただし、この表現式は円柱座標におけるベクトルモード関数の級数和として表されているため、方形アンテナや折れ曲がりアンテナを解析しようとする、アンテナ形状自体が円柱座標の関数となり扱いが煩雑となる。もちろん媒質に平行な円形アンテナの場合には円柱座標のままの方がよいが、直角座標の方がより広範囲の問題を扱うのに便利であると考えられる。そこで本論文では、円柱座標のダイアディックグリーン関数を直角座標表現に変換することとした。

本論文の前半では、後の議論で必要になることから、まず次元不均質媒質に対するダイアディックグリーン関数を円柱座標のベクトル波動関数で表現する古典

的な方法を簡単に紹介し、次に適当な変換を行うことによって単純化された直角座標表現を導出している。この際、媒質による影響の考察を容易にするために、波源側の領域ではダイアディックグリーン関数を直接波成分と散乱波成分とに分離した。また、数値計算や物理的解釈の利便性を考え、散乱波、透過波成分のダイアディックグリーン関数はできる限り直角座標における自由空間のダイアディックグリーン関数に類似するような表現形式に変換した。後半では、この単純化されたダイアディックグリーン関数表現をもとに、屈折率が  $-1$  の DNG 媒質近傍アンテナの基本的な性質について述べる。

## 2. 電気型ダイアディックグリーン関数

### 2.1 ベクトル波動関数による表現

図 1 のように  $z > 0$  の領域に電流源  $J(r')$  がある場合の電気型ダイアディックグリーン関数を

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}^{(e)}(r, r') &= \begin{cases} \overline{\overline{G}}_0^{(e)}(r, r') + \overline{\overline{G}}_s^{(e)}(r, r'), & z > 0 \\ \overline{\overline{G}}_t^{(e)}(r, r'), & z \leq 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

と表すと、直接波成分  $\overline{\overline{G}}_0^{(e)}(r, r')$  と散乱波成分  $\overline{\overline{G}}_s^{(e)}(r, r')$  は、 $z \leq 0$  の領域が均質である場合と全く同様に真空中のベクトル波動関数によって表される [15]。一方、 $z \leq 0$  の不均質領域における電界が満たす波動方程式

$$\nabla \times \left\{ \frac{1}{\mu_r(z)} \nabla \times \mathbf{E}(r) \right\} - k_0^2 \varepsilon_r(z) \mathbf{E}(r) = 0 \quad (2)$$

の解を、均質の場合にならって求めると、次の二つのベクトル波動関数を得る [15], [29]。

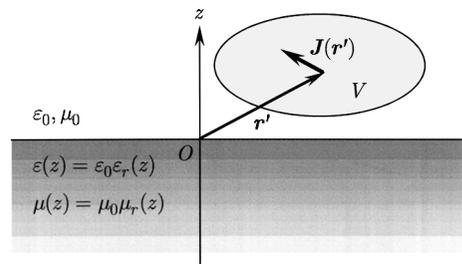


図 1 不均質媒質上の電流源

Fig. 1 Current source above inhomogeneous medium.

$$\begin{cases} M^{(e)}(\mathbf{r}) = \nabla \times \{\Psi^{(e)} \hat{z}\} \\ N^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_0 \varepsilon_r(z)} \nabla \times \nabla \times \{\Phi^{(e)}(\mathbf{r}) \hat{z}\} \end{cases} \quad (3)$$

式 (3) の  $M^{(e)}$ ,  $N^{(e)}$  を式 (2) の  $E$  に代入することによって, スカラ関数  $\Psi^{(e)}(\mathbf{r})$  と  $\Phi^{(e)}(\mathbf{r})$  が満たすべき微分方程式を容易に得ることができるが, これらを円柱座標で表したときの基本解をそれぞれ  $\Psi_{\circ n \lambda}^{(e)}(\mathbf{r})$ ,  $\Phi_{\circ n \lambda}^{(e)}(\mathbf{r})$  と書くと,

$$\begin{cases} \Psi_{\circ n \lambda}^{(e)}(\mathbf{r}) = Z_n(\lambda \rho) F^{(e)}(\lambda, z) \frac{\cos n \phi}{\sin n \phi} \\ \Phi_{\circ n \lambda}^{(e)}(\mathbf{r}) = Z_n(\lambda \rho) F^{(m)}(\lambda, z) \frac{\cos n \phi}{\sin n \phi} \end{cases} \quad (4)$$

となる. ただし  $Z_n(\lambda \rho)$  はベッセル関数であり, 関数  $F^{(e)}(\lambda, z)$ ,  $F^{(m)}(\lambda, z)$  はそれぞれ次の微分方程式を満足する.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F^{(e)}}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon_r(z)} \frac{d\varepsilon_r}{dz} \frac{dF^{(e)}}{dz} \\ + \{k_0^2 \varepsilon_r(z) \mu_r(z) - \lambda^2\} F^{(e)} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F^{(m)}}{dz^2} - \frac{1}{\mu_r(z)} \frac{d\mu_r}{dz} \frac{dF^{(m)}}{dz} \\ + \{k_0^2 \varepsilon_r(z) \mu_r(z) - \lambda^2\} F^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

さて, 均質媒質の場合にならって  $\overline{\overline{G}}_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\overline{\overline{G}}_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  をベクトル波動関数を用いて表現すると

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_{0n}}{\lambda h_0} \\ \cdot \left\{ R_n^{(e)}(\lambda) M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}) M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}') \right. \\ \left. + R_n^{(m)}(\lambda) N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}) N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}') \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_{0n}}{\lambda h_0} \\ \cdot \left\{ T_n^{(e)}(\lambda) M_{\circ n \lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}') \right. \\ \left. + T_n^{(m)}(\lambda) N_{\circ n \lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}') \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

となる. ここで  $R_n^{(e)}(\lambda)$ ,  $R_n^{(m)}(\lambda)$  は反射係数,  $T_n^{(e)}(\lambda)$ ,  $T_n^{(m)}(\lambda)$  は透過係数であり,  $z = 0$  における電磁界の境界条件によって決定される. また,  $h_0$  は  $z$  軸方向の波数で  $h_0 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$  によって与えら

れる. ただし  $Im(h_0) \leq 0$  である. 更に

$$\delta_{0n} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

はクロネッカーのデルタ,  $M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r})$ ,  $N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r})$  は真空中のベクトルモード関数である<sup>(注1)</sup>. 一方, 媒質中のベクトルモード関数  $M_{\circ n \lambda}^{(e)}(\mathbf{r})$ ,  $N_{\circ n \lambda}^{(e)}(\mathbf{r})$  は式 (4) を式 (3) に代入することによって得られ,

$$\begin{aligned} M_{\circ n \lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) = \left\{ \mp \frac{n}{\rho} J_n(\lambda \rho) \frac{\sin n \phi}{\cos n \phi} \hat{\rho} \right. \\ \left. - \frac{\partial J_n(\lambda \rho)}{\partial \rho} \frac{\cos n \phi}{\sin n \phi} \hat{\phi} \right\} F^{(e)}(\lambda, z) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} N_{\circ n \lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_0 \varepsilon_r(z)} \\ \cdot \left\{ \frac{\partial J_n(\lambda \rho)}{\partial \rho} \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)}{dz} \frac{\cos n \phi}{\sin n \phi} \hat{\rho} \right. \\ \mp \frac{n}{\rho} J_n(\lambda \rho) \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)}{dz} \frac{\sin n \phi}{\cos n \phi} \hat{\phi} \\ \left. + \lambda^2 J_n(\lambda \rho) F^{(m)}(\lambda, z) \frac{\cos n \phi}{\sin n \phi} \hat{z} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ただし,  $\rho = 0$  で電磁界が発散しないようにするために  $Z_n(\lambda \rho) = J_n(\lambda \rho)$  とした.

## 2.2 反射係数と透過係数

反射係数  $R_n^{(e)}(\lambda)$ ,  $R_n^{(m)}(\lambda)$  と透過係数  $T_n^{(e)}(\lambda)$ ,  $T_n^{(m)}(\lambda)$  は  $z = 0$  における電磁界の接線成分の連続性, すなわち  $\hat{z} \times \overline{\overline{G}}_t^{(e)}$  の連続性と  $\frac{1}{\mu_r(z)} \hat{z} \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_t^{(e)}$  の連続性から計算することができて,

$$\begin{cases} R_n^{(e)}(\lambda) = \frac{j h_0 \mu_r(0) - \frac{dF^{(e)}(\lambda, z)/dz}{F^{(e)}(\lambda, z)} \Big|_{z=0}}{j h_0 \mu_r(0) + \frac{dF^{(e)}(\lambda, z)/dz}{F^{(e)}(\lambda, z)} \Big|_{z=0}} \\ T_n^{(e)}(\lambda) = \frac{1 + R_n^{(e)}(\lambda)}{F^{(e)}(\lambda, 0)} \end{cases} \quad (12)$$

(注1): 付録 1. 参照

$$\begin{cases} R_n^{(m)}(\lambda) = \frac{j h_0 \varepsilon_r(0) - \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)/dz}{F^{(m)}(\lambda, z)} \Big|_{z=0}}{j h_0 \varepsilon_r(0) + \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)/dz}{F^{(m)}(\lambda, z)} \Big|_{z=0}} \\ T_n^{(m)}(\lambda) = \frac{1 + R_n^{(m)}(\lambda)}{F^{(m)}(\lambda, 0)} \end{cases} \quad (13)$$

となる．このように，反射係数も透過係数も  $\phi$  方向のモード次数  $n$  に無関係であるから，以降  $n$  を省略する．なお， $F^{(e)}(\lambda, 0) = F^{(m)}(\lambda, 0) = 1$  とおいても一般性を失わない．

### 2.3 不連続部の取扱い

$z = z_s < 0$  において  $\mu_r(z)$ ， $\varepsilon_r(z)$  が不連続に変化したとする．このとき電磁界の境界条件，すなわち  $\hat{z} \times \overline{G}^{(e)}$  と  $\frac{1}{\mu_r(z)} \hat{z} \times \nabla \times \overline{G}^{(e)}$  の連続性より次の条件を得る．

$$\begin{cases} F^{(e)}(\lambda, z_s - 0) = F^{(e)}(\lambda, z_s + 0) \\ \frac{1}{\mu_r(z)} \frac{dF^{(e)}(\lambda, z)}{dz} \Big|_{z_s-0} \\ = \frac{1}{\mu_r(z)} \frac{dF^{(e)}(\lambda, z)}{dz} \Big|_{z_s+0} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} F^{(m)}(\lambda, z_s - 0) = F^{(m)}(\lambda, z_s + 0) \\ \frac{1}{\varepsilon_r(z)} \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)}{dz} \Big|_{z_s-0} \\ = \frac{1}{\varepsilon_r(z)} \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)}{dz} \Big|_{z_s+0} \end{cases} \quad (15)$$

### 2.4 電気壁と磁気壁

$z = z_d < 0$  に完全電気壁があったとすると， $\hat{z} \times \overline{G}_t^{(e)} = 0$  より

$$\begin{cases} F^{(e)}(\lambda, z_d) = 0 \\ \frac{dF^{(m)}(\lambda, z)}{dz} \Big|_{z_d} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

を得る．特別な場合として， $\varepsilon_r(z) = \varepsilon_r = \text{一定}$ ， $\mu_r(z) = \mu_r = \text{一定}$  とすると，式 (5)，(6) より， $h_1 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_r \mu_r - \lambda^2}$  とし， $F^{(e)}(\lambda, z) = A^{(e)} e^{j h_1 z} + B^{(e)} e^{-j h_1 z}$  と書けるから，2.2 と式 (16) より  $A^{(e)}$ ， $B^{(e)}$  及び  $R_n^{(e)} \sim T_n^{(m)}$  が容易に定まる．これらを式 (10)，(11) に代入し，更にこれらを用いて式 (7)，(8) を書き換えると，文献 [15] の 11.5 節と同じ結果を得る．

一方，完全磁壁の場合は  $\frac{1}{\mu_r(z)} \hat{z} \times \nabla \times \overline{G}_t^{(e)} = 0$

より

$$\begin{cases} \frac{dF^{(e)}(\lambda, z)}{dz} \Big|_{z_d} = 0 \\ F^{(m)}(\lambda, z_d) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

となる．

### 3. ダイアディックグリーン関数の簡略化

付録 2. に示すように，式 (7) の  $M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r})$ ， $M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}')$ ， $N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}) N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}')$  の  $n$  に関する総和と，式 (8) の  $M_{\circ n \lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) M_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}')$ ， $N_{\circ n \lambda}^{(1)}(\mathbf{r}) N_{\circ n \lambda}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}')$  の  $n$  に関する総和をベッセル関数に関する加法定理

$$J_0(\lambda|\rho - \rho'|) = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\rho') \cos n(\phi - \phi') \quad (18)$$

を用いて  $J_0(\lambda|\rho - \rho'|)$  の  $\rho$ ， $\phi$ ， $\rho'$  及び  $\phi'$  の偏微分表現に変換した後に，円柱座標と直角座標との関係式  $x = \rho \cos \phi$ ， $y = \rho \sin \phi$  と

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J_0}{\partial y^2} = -\lambda^2 J_0(\lambda|\rho - \rho') \quad (19)$$

を用いると，円柱座標のベクトルモード関数で表したダイアディックグリーン関数 (7)，(8) は以下のような直角座標における表現に直すことができる．

$$\begin{aligned} & \overline{G}_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= \begin{bmatrix} P_s^{(e)} + \frac{\partial^2 Q_s}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Q_s}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 Q_s}{\partial y \partial x} & P_s^{(e)} + \frac{\partial^2 Q_s}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & P_s^{(m)} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{k_0^2} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial z \partial x} & -\frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 P_s^{(m)}}{\partial z^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし，

$$P_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{h_0} R^{(e)}(\lambda) J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) e^{-jh_0(z+z')} d\lambda \quad (21)$$

$$P_s^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{h_0} R^{(m)}(\lambda) J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) e^{-jh_0(z+z')} d\lambda \quad (22)$$

$$Q_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{R^{(e)}(\lambda) + R^{(m)}(\lambda)}{\lambda h_0} J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) e^{-jh_0(z+z')} d\lambda \quad (23)$$

である。なお、関数  $Q_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は上式とは別な表現も可能であるが<sup>(注2)</sup>、式 (20) がやや煩雑となる。

透過波成分  $\overline{\overline{G}}_t^{(e)}$  についても同様の計算を行うと

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{G}}_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= \begin{bmatrix} P_t^{(e)} + \frac{\partial^2 Q_t^{(e)}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Q_t^{(e)}}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{\partial^2 Q_t^{(e)}}{\partial y \partial x} & P_t^{(e)} + \frac{\partial^2 Q_t^{(e)}}{\partial y^2} & 0 \\ \mu_r \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial x} & \mu_r \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial y} & \mu_r P_t^{(m)} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{k_0^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial z} \right\} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial z} \right\} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial z} \right\} & \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial Q_t^{(m)}}{\partial z} \right\} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial P_t^{(m)}}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial P_t^{(m)}}{\partial z} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial P_t^{(m)}}{\partial z} \right\} \end{bmatrix} \quad (24) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$P_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{h_0} T^{(e)}(\lambda) J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) F^{(e)}(\lambda, z) e^{-jh_0 z'} d\lambda \quad (25)$$

$$P_t^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda}{h_0} T^{(m)}(\lambda)$$

$$J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) F^{(m)}(\lambda, z) e^{-jh_0 z'} d\lambda \quad (26)$$

$$Q_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda h_0} T^{(e)}(\lambda) J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) F^{(e)}(\lambda, z) e^{-jh_0 z'} d\lambda \quad (27)$$

$$Q_t^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} T^{(m)}(\lambda) J_0(\lambda|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) F^{(m)}(\lambda, z) e^{-jh_0 z'} d\lambda \quad (28)$$

である。このようにダイアディックグリーン関数を直角座標による直角座標成分表現に変換できたことにより、媒質上の方形パッチアンテナや V 形ダイポールアンテナの解析は円柱座標における表現 (7), (8) を用いるよりも格段に容易になったと考えられる。

#### 4. 屈折率が $-1$ の DNG スラブに対する電気型ダイアディックグリーン関数

本章では、図 2 に示すような厚さ  $d_1$  の DNG スラブに対する電気型ダイアディックグリーン関数を導出し、近傍電磁界の基本的特性を検討する。

##### 4.1 $F^{(e)}(\lambda, z)$ と $F^{(m)}(\lambda, z)$

各層内で誘電率も透磁率も一定であるから、 $h_1 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_r \mu_r - \lambda^2}$  とおくと、 $F^{(e)}(\lambda, z)$ ,  $F^{(m)}(\lambda, z)$  は  $A^{(e)} \sim C^{(e)}$  を任意定数として、

$$F^{(e)}(\lambda, z) = \begin{cases} A^{(e)} e^{jh_1 z} + B^{(e)} e^{-jh_1 z}, & -d_1 \leq z \leq 0 \\ C^{(e)} e^{jh_0 z}, & z \leq -d_1 \end{cases} \quad (29)$$

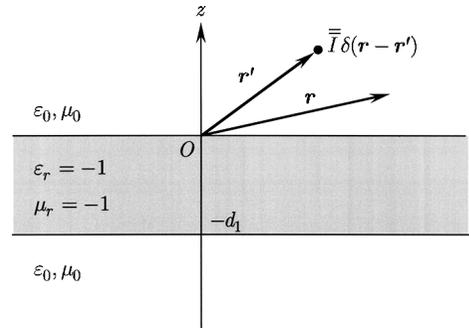


図 2 屈折率が  $-1$  の DNG スラブ  
Fig. 2 DNG slab whose refractive index is  $-1$ .

(注2): 付録 3. 参照

と表される．さて， $\rho$  方向の波数  $\lambda$  を  $\lambda = 0$  としたときの  $z$  方向の波数は  $h_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$  となるが， $\varepsilon_r < 0$ ， $\mu_r < 0$  のとき， $h_1 = -k_0 \sqrt{|\varepsilon_r| |\mu_r|}$  の分岐を選ばなければならないから [4]，任意の  $\lambda$  に関してもこのような分岐を選ぶものとする．ここでは  $\varepsilon_r = \mu_r = -1$  であるから， $h_1 = -h_0$  となる．このような分岐を選んだとき，式 (29) の係数  $A_m^{(e)} \sim C_m^{(e)}$  間の関係を  $z = -d_1$  における境界条件 (14)，(15) によって定め，式 (12)，(13) に代入することにより， $R^{(e)} = R^{(m)} = 0$  を得る．すなわち，屈折率が  $-1$  の DNG スラブはその近傍に置かれたアンテナの特性に影響を及ぼさない．また，

$$T^{(e)} F^{(e)}(\lambda, z) = T^{(m)} F^{(m)}(\lambda, z) = \begin{cases} e^{-jh_0 z}, & -d_1 < z < 0 \\ e^{2jh_0 d_1} e^{jh_0 z}, & z \leq -d_1 \end{cases} \quad (30)$$

となるから，DNG 媒質内では  $z$  の正の方向に進む波だけが存在し， $z \leq -d_1$  では  $z$  の負の方向に進む波だけが存在することが分かる．

#### 4.2 ダイアディックグリーン関数

式 (30) を式 (25) ~ (28) に代入し，積分公式 [30]

$$\mp j \int_0^\infty \frac{\lambda}{h_0} J_0(\lambda \rho) e^{-jh_0 |z|} d\lambda = \frac{e^{\mp j k_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (31)$$

を用いると， $-d_1 < z < 0$ ， $z \leq -d_1$  の各領域におけるダイアディックグリーン関数  $\overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ， $\overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を求めることができ，

$$\overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & -1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} G_0^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (32)$$

$$\overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left( \overline{\overline{I}} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \nabla \right) G_0^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (33)$$

となる．ただし， $R_1 = \sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z + z')^2}$ ， $R_2 = \sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z + 2d_1 - z')^2}$  としたとき，スカラグ

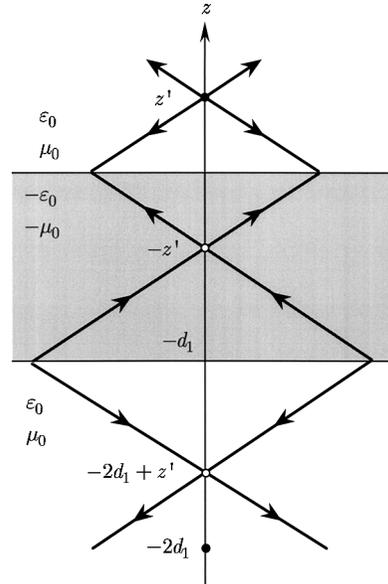


図3 DNG スラブに対する伝搬経路  
Fig.3 Propagation path of DNG slab.

リー関数  $G_0^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ， $G_0^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は次式で与えられる．

$$G_0^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 R_1}}{R_1}, & -z' < z \leq 0 \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk_0 R_1}}{R_1}, & -d_1 \leq z < -z' \end{cases} \quad (34)$$

$$G_0^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 R_2}}{R_2}, & z \leq -2d_1 + z' \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk_0 R_2}}{R_2}, & -2d_1 + z' < z < -d_1 \end{cases} \quad (35)$$

これらより， $(\rho', z')$  ( $0 < z' < d_1$ ) にある波源からの伝搬経路を描くと図 3 のようになる．この幾何学的伝搬経路はスネルの法則と文献 [1]，[3] から容易に想像できるが，式 (32)，(33) のようなダイアディックグリーン関数が求まったことにより，次のようなことが分かる．(a)  $(\rho', z')$  にある電流源  $\mathbf{J}(\rho', z') = J_x(\rho', z')\hat{x} + J_y(\rho', z')\hat{y} + J_z(\rho', z')\hat{z}$  のイメージ電流は  $(\rho', -z')$  と  $(\rho', -2d_1 + z')$  の位置にでき，DNG 媒質内部の電磁界は  $\mathbf{J}_1^{image}(\rho', -z')$  によって，媒質透過領域 ( $z \leq -d_1$ ) の電磁界は  $\mathbf{J}_2^{image}(\rho', -2d_1 + z')$  から求められる．(b)  $\mathbf{J}_1^{image}$

の水平成分は  $J$  と同じ方向を向くが、垂直成分は逆方向となる。これに対して  $J_2^{image}$  は  $J$  と同方向となる<sup>(注3)</sup>。また、式 (34), (35) から、スカラグリーン関数は観測点の位置によって異なり、(c)  $-z' < z < 0$  では  $(\rho', -z')$  を波源とする真空中のスカラグリーン関数になるのに対して、 $-d_1 < z < -z'$  ではこのグリーン関数に負の符号を付け共役複素数をとらなければならない。媒質透過領域 ( $z \leq -d_1$ ) のスカラグリーン関数も同様である。

一方、式 (34) の第 2 式及び式 (35) の第 2 式をフーリエ変換して時間領域に直すと、これらは波源に向かって収縮する球面波となることから因果律を満たさない。すなわち、すべての周波数範囲にわたって屈折率が  $-1$  になる媒質は存在しないといえる。しかし、Drude 分散やローレンツ分散のように屈折率が負になる周波数範囲が限られているなら、時間領域のグリーン関数は因果律を満たすから、このような DNG 媒質は存在し得ることになる [4], [31]。

## 5. 導体板付 DNG スラブに対する電気型ダイアディックグリーン関数

図 4 に示すような導体板付き DNG スラブに関しても前章と同様に電気型ダイアディックグリーン関数を容易に求めることができる。

### 5.1 $F^{(e)}(\lambda, z)$ と $F^{(m)}(\lambda, z)$

$-d_1 \leq z \leq 0$  における関数  $F^{(e)}(\lambda, z)$ ,  $F^{(m)}(\lambda, z)$  は式 (29) と同じ形となるから、これに  $z = z_d = -d_1$  での境界条件 (16) を適用すると未定係数  $A^{(e)}$ ,  $B^{(e)}$  が定まり、式 (12), (13) より

$$\begin{cases} R^{(e)}(\lambda) = -e^{2jh_0d_1} \\ R^{(m)}(\lambda) = e^{2jh_0d_1} \end{cases} \quad (36)$$

及び

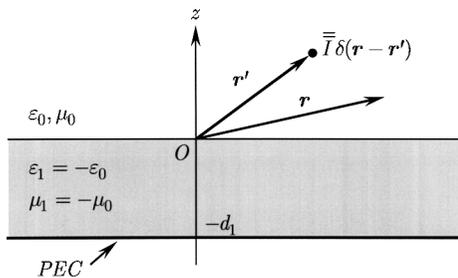


図 4 導体板付 DNG スラブ

Fig. 4 DNG slab backed by perfect conductor.

$$\begin{cases} T^{(e)}(\lambda)F^{(e)}(\lambda, z) \\ = e^{-jh_0z} - e^{2jh_0d_1}e^{jh_0z} \\ T^{(m)}(\lambda)F^{(m)}(\lambda, z) \\ = e^{-jh_0z} + e^{2jh_0d_1}e^{jh_0z} \end{cases} \quad (37)$$

を得る。

### 5.2 ダイアディックグリーン関数

式 (36) を式 (21) ~ (23) に代入して前章と同様の計算をすると、

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & -1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \\ G_0^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \quad (38) \end{aligned}$$

を得る。ただしスカラグリーン関数  $G_0^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は、 $R_s = \sqrt{|\rho - \rho'|^2 + (z - 2d_1 + z')^2}$  として、

$$G_0^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0R_s}}{R_s}, & z > 2d_1 - z' \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk_0R_s}}{R_s}, & 0 < z < 2d_1 - z' \end{cases} \quad (39)$$

によって与えられる。

このことからまず、電流源  $J(\rho', z')$  のイメージ電流  $J^{image}$  は  $(\rho', 2d_1 - z')$  の位置にできることが分かる。次に式 (38) より、 $J^{image}$  の水平成分は  $J$  と逆方向となるのに対して、垂直成分は同方向となるから、イメージ電流は結局  $J^{image}(\rho', 2d_1 - z') = -J_x(\rho', 2d_1 - z')\hat{x} - J_y(\rho', 2d_1 - z')\hat{y} + J_z(\rho', 2d_1 - z')\hat{z}$  と表される。これらをもとに  $0 < z' < d_1$  にある電流源  $J(\rho', z')$  のイメージ電流  $J^{image}$  を図示すると図 5 のようになる。

一方、 $-d_1 \leq z \leq 0$  の領域におけるダイアディックグリーン関数  $\overline{\overline{G}}_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は、式 (37) を式 (25) ~ (28) に代入することによって得られ、

$$\overline{\overline{G}}_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (40)$$

(注3): 式 (34), (35) の符号を考えると必ずしもこのような一義的な方向を定めることはできないが、ここでは真空中のスカラグリーン関数、すなわち式 (34), (35) の第 1 式を基準として方向を定めることとした。

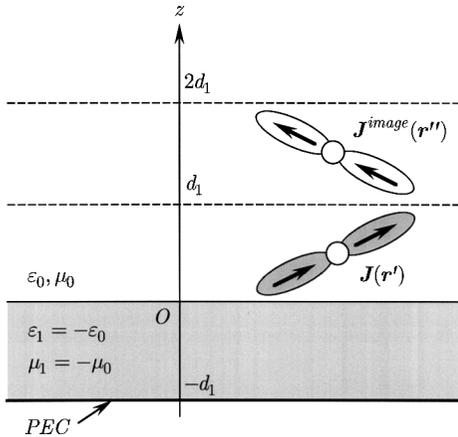


図5 イメージ電流  
Fig. 5 Image current.

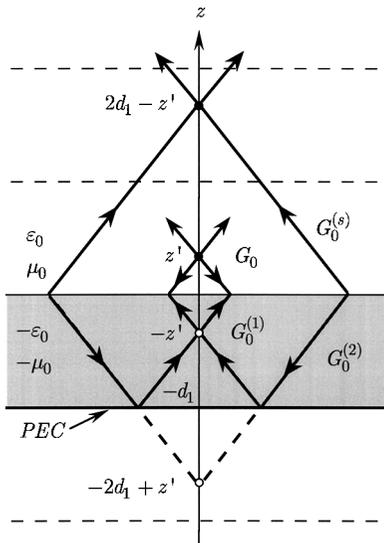


図6 伝搬経路  
Fig. 6 Propagation path.

となる．ここで、 $\overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 、 $\overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は前章の式 (32)、(33) と同じものであるが、式 (35) のスカラーグリーン関数  $G_0^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の範囲だけが次のように変更される．

$$G_0^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 R_2}}{R_2}, & z \geq -2d_1 + z' \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk_0 R_2}}{R_2}, & z < -2d_1 + z' \end{cases} \quad (41)$$

式 (38) ~ (41) より、 $(\rho', z' < d_1)$  にある点波源から

の伝搬経路を示すと図 6 のようになる．まず、 $z'$  から DNG 媒質へ浸透する波は式 (40) のように  $\overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  と  $\overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  の和によって表されるが、 $\overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  に対する伝搬経路は図 3 と同じである． $\overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  によって表される電磁界のイメージも図 3 と同じように  $(\rho', -2d_1 + z')$  にできるが、ここでの観測点は  $-d_1 \leq z \leq 0$  であるから、式 (41) より  $(\rho', -2d_1 + z')$  に向かう波となる．一方  $z \geq 0$  の領域では、散乱界に対するイメージは  $(\rho', 2d_1 - z')$  の位置にできるが、式 (39) より、 $z < 2d_1 - z'$  では  $(\rho', 2d_1 - z')$  に向かう波、 $z > 2d_1 - z'$  ではこの点から放射される波を表すことになる．

### 6. 磁気壁付 DNG スラブに対する電気型ダイアディックグリーン関数

$z = -d_1$  に磁気壁がある場合には、式 (17) の境界条件より

$$\begin{cases} R^{(e)}(\lambda) = e^{2jh_0 d_1} \\ R^{(m)}(\lambda) = -e^{2jh_0 d_1} \end{cases} \quad (42)$$

及び

$$\begin{cases} T^{(e)}(\lambda)F^{(e)}(\lambda, z) = e^{-jh_0 z} + e^{2jh_0 d_1} e^{jh_0 z} \\ T^{(m)}(\lambda)F^{(m)}(\lambda, z) = e^{-jh_0 z} - e^{2jh_0 d_1} e^{jh_0 z} \end{cases} \quad (43)$$

となるから、これらを式 (21) ~ (23) 及び式 (25) ~ (28) に代入して前章と同様の計算をすると、

$$\overline{\overline{G}}_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & 1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & -1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} G_0^{(s)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (44)$$

$$\overline{\overline{G}}_t^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overline{\overline{G}}_{1t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (45)$$

を得る．ただし上式のダイアディックグリーン関数  $\overline{\overline{G}}_{2t}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  を計算するためのスカラーグリーン関数  $G_0^{(2)}$  は式 (41) によって与えられる．

### 7. その他のダイアディックグリーン関数

前章までは、電流源に対する電気型のダイアディックグリーン関数について述べてきたが、磁気型ダイアディックグリーン関数  $\overline{\overline{G}}^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は

$$\overline{\overline{G}}^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\mu_r(z)} \nabla \times \overline{\overline{G}}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (46)$$

より求めることができる。また、磁流源  $\mathbf{K}(\mathbf{r})$  に対する磁界を与えるダイアディックグリーン関数は電磁界の双対性より、

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{r}) & \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{r}) \\ \varepsilon_0 \varepsilon_r(z) & \rightarrow \mu_0 \mu_r(z) \\ \mu_0 \mu_r(z) & \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon_r(z) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) & \rightarrow -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (47)$$

の変換を行うことによって容易に求めることができる [32]。

### 8. む す び

本論文はまず、一次元層状不均質媒質に対するダイアディックグリーン関数を、円柱座標表現から直角座標表現に変換した。円柱座標系のベクトルモード関数の級数和と無限積分によって表されていたものを、無限積分は残るものの直角座標に変換できたため、媒質上の方形アンテナや任意の直線状アンテナを解析する際に極めて便利になったと考える。

次に、DNG 媒質をアンテナの分野に応用することを目的に、その第一歩として媒質の屈折率が  $-1$  になる DNG スラブに対する厳密な直角座標表現のダイアディックグリーン関数を導出し、DNG スラブ近傍電磁界の基本的な性質を明らかにした。また、電気壁あるいは磁気壁付 DNG スラブに対するダイアディックグリーン関数を導出した。今後はより具体的なアンテナの問題を検討する予定である。また、DNG 媒質以外のメタマテリアルについても同様の検討を行い、アンテナ等への応用の可能性を探る予定である。

#### 文 献

- [1] V.G. Veselago, "The electrodynamics of substrates with simultaneously negative values of  $\varepsilon$  and  $\mu$ ," *Sov. Phys. Uspekhi*, vol.10, no.4, pp.509-514, Jan.-Feb. 1968.
- [2] H. Kosada, T. Kawashima, A. Tomota, M. Notomi, T. Tamamura, T. Sato, and S. Kawakami, "Superprism phenomena in photonic crystals," *Phys. Rev. B, Condens. Matter*, vol.58, pp.R10096-R10099, Oct. 1998.
- [3] J.B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Phys. Rev. Lett.*, vol.85, no.18, pp.3966-3969, Oct. 2000.
- [4] R.W. Ziolkowski and E. Heyman, "Wave propagation in media having negative permittivity and permeability," *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdisp. Top.*, vol.64, no.056625, pp.1-15, Oct. 2001.
- [5] R.W. Ziolkowski, "Design, fabrication, and testing of double negative metamaterials," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.51, no.7, pp.1516-1529, July 2003.
- [6] S. Antipov, W. Gai, W. Lui, J. Power, and L. Spentzouris, "Design, fabrication and testing of left-handed materials," *Wakefield Note, WF-Note-229*, Argonne National Lab., U.S. Department of Energy Lab., April 2005.
- [7] N. Engheta, ed., "Special issue on wave interactions with chiral and complex media," *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol.6, no.5/6, 1992.
- [8] C. Caloz, A. Sanada, and T. Itoh, "A novel composite right-/left-handed coupled-line directional coupler with arbitrary coupling level and broad bandwidth," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.52, no.3, pp.980-992, March 2004.
- [9] S.F. Mahmoud, "A new miniaturized annular ring patch resonator partially loaded by a metamaterial ring with negative permeability and permittivity," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol.3, pp.19-22, 2004.
- [10] L. Lui, C. Caloz, and T. Itoh, "Dominant mode (DM) leaky-wave antenna with backfire-to-endfire scanning capability," *Electron. Lett.*, vol.38, no.23, pp.1414-1416, Nov. 2002.
- [11] C. Caloz and T. Ito, "Metamaterials for high-frequency electronics," *Proc. IEEE*, vol.93, no.10, pp.1744-1752, Oct. 2005.
- [12] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York, 1949.
- [13] J.A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [14] V.W. Hansen, *Numerical Solution of Antennas in Layered Media*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [15] C.-T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, 2nd ed., IEEE Press, New York, 1994.
- [16] R.E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, 2nd ed., IEEE Press, New York, 1991.
- [17] W.C. Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, IEEE Press, 1995.
- [18] L.P. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [19] D.G. Dudley, *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory*, IEEE Press, New York, 1994.
- [20] C.M. Krowne, "Green's function in the spectral do-

main for biaxial and uniaxial anisotropic planar dielectric structure,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-32, no.12, pp.1273–1281, Dec. 1984.

- [21] J.S. Bagby and D.P. Nyquist, “Dyadic Green’s functions for integrated electric and optical circuits,” IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.MTT-35, no.2, pp.206–210, Feb. 1987.
- [22] W.C. Chew, “Some observations on the spatial and eigenfunction representations of dyadic Green’s functions,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.37, no.10, pp.1322–1327, Oct. 1989.
- [23] D.M. Pozar and D.H. Schaubert, ed., Microstrip Antennas, IEEE Press, New York, 1995.
- [24] G.W. Hanson, “Dyadic eigenfunctions and natural modes for hybrid waves in planar media,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.52, no.4, pp.941–947, April 2004.
- [25] P.H. Pathak, “On the eigenfunction expansion of electromagnetic dyadic Green’s functions,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-31, no.6, pp.837–846, Nov. 1983.
- [26] F.L. Mesa, R. Marqués, and M. Horno, “A general algorithm for computing bidimensional spectral Green’s dyad in multilayered complex bianisotropic media: The equivalent boundary method,” IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.39, no.9, pp.1640–1649, Sept. 1991.
- [27] S. Barkeshli and P.H. Pathak, “On the dyadic Green’s function for a planar multilayered dielectric/magnetic media,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.40, no.1, pp.128–142, Jan. 1992.
- [28] 山口喜次, 宮下裕章, 千葉 勇, 江頭 茂, “モード展開可能な開放若しくは閉一様導波管断面を有する平面多層媒質 Dyadic Green 関数の一般的構成法,” 信学論 (B-II), vol.J80-B-II, no.5, pp.406–415, May 1997.
- [29] 安達三郎, “不均質・異方性媒質中の電磁界,” 電子通信学会 (編), 飯島泰蔵 (監修), 電磁界の近代解析法, 第4章, コロナ社, 1979.
- [30] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed., p.416, Cambridge University Press, 1944.
- [31] 宇野 亨, “無損失 DNG スラブ近傍アンテナのインピーダンス特性,” 信学技報, A-P2005-55, July 2005.
- [32] 安達三郎, 米山 務, 電波伝送工学, コロナ社, 1981.

## 付 録

### 1. 真空中のベクトルモード関数

$$\mathbf{m}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) = \mp \frac{n}{\rho} J_n(\lambda\rho) \frac{\sin n\phi}{\cos n\phi} \hat{\phi} - \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} \hat{\rho} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

$$\mathbf{n}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) = \frac{\partial J_n(\lambda\rho)}{\partial \rho} \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} \hat{\rho}$$

$$\mp \frac{n}{\rho} J_n(\lambda\rho) \frac{\sin n\phi}{\cos n\phi} \hat{\phi} \quad (\text{A}\cdot 2)$$

$$\mathbf{p}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) = J_n(\lambda\rho) \frac{\cos n\phi}{\sin n\phi} \hat{z} \quad (\text{A}\cdot 3)$$

とおくと, 真空中のベクトル波動関数  $M_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(h_0, \mathbf{r})$ ,  $N_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(h_0, \mathbf{r})$  は次式で与えられる.

$$\mathbf{M}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}) = \mathbf{m}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) e^{-jh_0 z} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

$$\mathbf{N}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(h_0, \mathbf{r}) = \frac{1}{k_0} \left\{ -jh_0 \mathbf{n}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) + \lambda^2 \mathbf{p}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) \right\} e^{-jh_0 z} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

2. ダイアディックグリーン関数の直角座標表現  
式 (7) も式 (8) も同様にできるから, 式 (7) を直角座標表現に変換する方法について説明する. 2.2 で述べたように, 反射係数はモード次数  $n$  に無関係であることを考慮し, 付録 1. の関係を利用すると, 式 (7) は

$$\begin{aligned} \overline{\overline{G}}_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_0} \left[ R^{(e)}(\lambda) \overline{\overline{A}}(\lambda) \right. \\ &+ R^{(m)}(\lambda) \left\{ -\frac{h_0^2}{k_0^2} \overline{\overline{B}}(\lambda) - j \frac{h_0 \lambda^2}{k_0^2} \overline{\overline{C}}(\lambda) \right. \\ &\left. \left. - j \frac{h_0 \lambda^2}{k_0^2} \overline{\overline{D}}(\lambda) + \frac{\lambda^4}{k_0^2} \overline{\overline{E}}(\lambda) \right\} \right] e^{-jh_0(z+z')} \quad (\text{A}\cdot 6) \end{aligned}$$

となる. ただし

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}}(\lambda) &= \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_{0n}) \\ &\mathbf{m}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) \mathbf{m}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}', \phi') \quad (\text{A}\cdot 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{B}}(\lambda) &= \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_{0n}) \\ &\mathbf{n}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) \mathbf{n}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}', \phi') \quad (\text{A}\cdot 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C}}(\lambda) &= \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_{0n}) \\ &\mathbf{n}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) \mathbf{p}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}', \phi') \quad (\text{A}\cdot 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{D}}(\lambda) &= \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_{0n}) \\ &\mathbf{p}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}, \phi) \mathbf{n}_{\epsilon_{n\lambda}}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}', \phi') \quad (\text{A}\cdot 10) \end{aligned}$$

$$\overline{\overline{E}}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) \tag{A-17}$$

$$P_{e_{n\lambda}}^{(1)}(\rho, \phi) P_{e_{n\lambda}}^{(1)}(\rho', \phi') \tag{A-11}$$

である。これらの級数和を計算し、式 (18) を用いると、例えば  $\overline{\overline{A}}(\lambda)$  は

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}}(\lambda) = & \hat{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{\rho'} \frac{\partial J_0}{\partial \phi'} \hat{\rho}' - \frac{\partial J_0}{\partial \rho'} \hat{\phi}' \right\} \\ & - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{\rho'} \frac{\partial J_0}{\partial \phi'} \hat{\rho}' - \frac{\partial J_0}{\partial \rho'} \hat{\phi}' \right\} \end{aligned} \tag{A-12}$$

となる。次に円柱座標と直角座標との関係  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$  などを用いると、式 (A-12) は

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}}(\lambda) = & \frac{\partial^2 J_0}{\partial y \partial y'} \hat{x} \hat{x} - \frac{\partial^2 J_0}{\partial y \partial x'} \hat{x} \hat{y} \\ & - \frac{\partial^2 J_0}{\partial x \partial y'} \hat{y} \hat{x} + \frac{\partial^2 J_0}{\partial x \partial x'} \hat{y} \hat{y} \end{aligned} \tag{A-13}$$

と直角座標に変換できる。更に  $\partial/\partial x' = -\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y' = -\partial/\partial y$  と式 (19) を用いると式 (A-13) は

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}}(\lambda) = & \left( \lambda^2 J_0 + \frac{\partial^2 J_0}{\partial x^2} \right) \hat{x} \hat{x} + \frac{\partial^2 J_0}{\partial x \partial y} \hat{x} \hat{y} \\ & + \frac{\partial^2 J_0}{\partial y \partial x} \hat{y} \hat{x} + \left( \lambda^2 J_0 + \frac{\partial^2 J_0}{\partial y^2} \right) \hat{y} \hat{y} \end{aligned} \tag{A-14}$$

となる。式 (A-8) ~ 式 (A-11) についても同様の計算を行い、それらを式 (A-6) に代入すると式 (7) を得る。

### 3. 関数 $Q_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ の別表現

$h_0^2 = k_0^2 - \lambda^2$  であることを考慮すると、

$$\frac{1}{\lambda h_0} = \frac{1}{k_0^2} \frac{h_0^2 + \lambda^2}{\lambda h_0} = \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{h_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{h_0} \right) \tag{A-15}$$

となるから、式 (23) は

$$\begin{aligned} Q_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \frac{Q_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + Q_s^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{k_0^2} \\ & + \frac{P_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + P_s^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{k_0^2} \end{aligned} \tag{A-16}$$

と変形できる。ただし

$$\begin{aligned} Q_s^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{h_0}{\lambda} R^{(e)}(\lambda) \\ & J_0(\lambda|\rho - \rho'|) e^{-jh_0(z+z')} d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_s^{(m)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -\frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{h_0}{\lambda} R^{(m)}(\lambda) \\ & J_0(\lambda|\rho - \rho'|) e^{-jh_0(z+z')} d\lambda \end{aligned} \tag{A-18}$$

である。

(平成 18 年 1 月 5 日受付, 4 月 11 日再受付)



宇野 亨 (正員)

昭 60 東北大学大学院博士課程了。工博。同年同大工学部助手、平 3 同助教授、平 10 東京農工大・工・教授。平 10~11 ペンシルベニア州立大学客員研究員。平 17 より IEEE AP-S Japan Chapter Chair。この間、電磁波における逆問題、計算電磁気学、アンテナと人体との電磁相互作用等の研究に従事。平元本会篠原記念学術奨励賞。著書「FDTD 法による電磁界及びアンテナ解析」(コロナ社)など。AGU, ACES, 日本シミュレーション学会, 日本文化財探査学会会員, IEEE シニア会員。